

Bouwkunde



Adam Cooman

Pieter Ruelens

Hannes Maes

Zjef van de Poel

Maarten Weckx

Maxime Geeroms

INHOUD

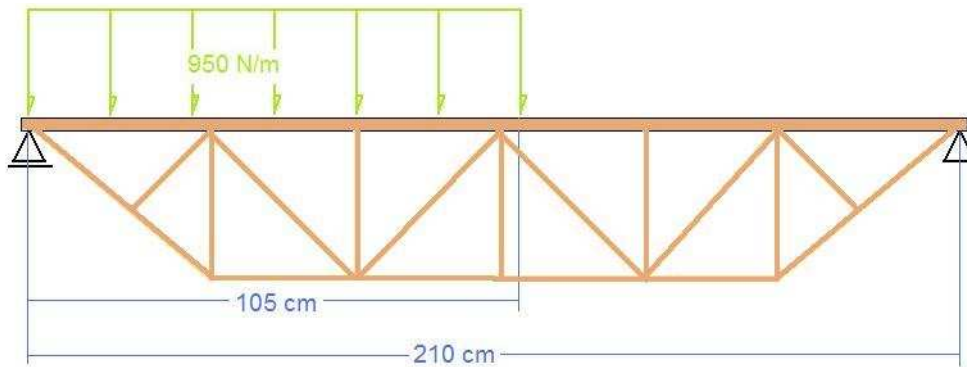
Verslag Bouwkunde	1
1. Inleiding	4
2. Materiaalbespreking	6
2.1. Experimentele metingen	6
2.1.1. Trekproeven	6
2.1.2. Buigproeven	9
2.2. Verbindingen	11
2.2.1. Lijm	11
2.2.2. Bouten	12
2.3. Optimale elementen in knik	15
2.3.1. Standaard balk (6,15x25,60mm)	15
2.3.2. Balk (b=h):	16
2.3.3. Holle balk:	17
2.4. Driehoek als testcase	18
2.4.1. Berekeningen	18
2.4.2. Testen	22
2.4.3. Conclusie	23
3. Ontwerp van de brug	24
3.1. Optimalisatieoefening	24
3.1.1. Theoretisch	24
3.1.2. Uitwerking en Programmering	28
3.2. Matrixmethode	32
3.2.1. Matrixmethode in theorie	32
3.2.2. Programmeren van de matrixmethode	34
3.2.3. Problemen met de matrixmethode	37
3.3. SCIA	37
3.3.1. Ontwerp Maxime	37
3.3.2. Ontwerp Hannes	38
3.3.3. Keuze van ontwerp	39
4. Uitvoering en bouw van het ontwerp	40
4.1. Eerste model	40
4.1.1. Dimensioneren van de brug (versie 1)	40
4.1.2. Knooppunten	42
4.1.3. Het in elkaar zetten van de puzzel (versie 1)	42
4.1.4. Problemen van het eerste model	43
4.2. Tweede model	44

4.2.1.	Ontwerp.....	44
4.2.2.	Dimensioneren van de brug (versie 2)	45
4.2.3.	Het in elkaar zetten van de puzzel (versie 2)	47
5.	Resultaten.....	49
5.1.	Praktische resultaten	49
5.2.	Besluit.....	50
6.	Extra voor Ward	51
6.1.	Tekening van het ingewikkeldste knooppunt	51
6.2.	Ecologische voetafdruk	52

1. Inleiding

Tijdens het tweede semester van het tweede jaar Bachelor in de Ingenieurswetenschappen werd er met verschillende studentengroepen gewerkt aan een technologieproject over bouwkunde. Elke groep bestond uit een 6-tal studenten. De leden van de groep door wie dit verslag werd geschreven waren: Zjef Van de Poel, Maxime Geeroms, Adam Cooman, Pieter Ruelens, Maarten Weckx en Hannes Maes.

Het doel van het project was het ontwerpen van een model voor een brug en deze brug ook te bouwen en testen. De brug bestond uit een voor alle groepen identiek wegdek met een lengte van 2,1 meter dat moest versterkt worden om te voldoen aan bepaalde eisen op vlak van stijfheid, sterkte en stabiliteit. Deze versterking moest bestaan uit een vakwerk. Op de laatste dag van het project werd deze brug dan onderworpen aan een lineaire belasting van 952 N/m die slechts aan één zijde werd opgelegd, dus van het begin van de brug tot op een lengte van 1,05 meter. Bij het opleggen van deze belasting mocht de brug over zijn ganse lengte niet meer dan 1 % van zijn totale overspanning, wat overeenkomt met 21 mm, doorbuigen.



De reden voor een asymmetrische belasting is dat bij een symmetrische belasting een symmetrisch vakwerk nodig is. Over symmetrische vakwerken is er zodanig veel informatie voorhanden waardoor de opdracht te veel uit opzoekwerk in plaats van denkwerk zou bestaan. Daarom werd gekozen voor deze asymmetrische belasting.

De opdracht bestond erin deze versterking te maken met een minimum aan materiaal. Het materiaal dat voorhanden was heet MDF, een soort vezelhout waarvan enkel richtwaarden gegeven waren. Belangrijke eigenschappen zoals maximale trek- en drukspanning moesten door de studenten zelf onderzocht worden aan de hand van verschillende proeven. Verder mocht er voor de simulaties en het ontwerp van het vakwerk gebruik worden gemaakt van een programma, 'ESA- PT' genaamd, dat in dit verslag vaker zal vermeld worden als 'Scia Engineer'.

Alvorens men aan een ontwerp kon beginnen moesten dus verschillende problemen, voorwaardes en fenomenen horend bij het gebruik van het MDF gecontroleerd worden en moest er nagedacht worden over een methode om tot een goed ontwerp van een vakwerk te komen. Dit verslag is dan ook opgebouwd volgens deze redenering:

Eerst werd een grondige studie en bespreking gedaan van het materiaal en zijn eigenschappen, hiervoor werden verschillende uiteenlopen testen gedaan.

Tegelijkertijd werd er al gewerkt aan een methode voor het creëren van het ontwerp, hiervoor werden verschillende mogelijkheden onderzocht. Ook kon men een opgelegde optimalisatieoefening gebruiken als richtlijn bij het maken van het ontwerp.

Na het vinden van een ontwerp moest de brug nog gebouwd worden. Ook hier kwamen verschillende moeilijkheden aan bod die verder zullen worden toegelicht.

Tot slot wordt er een besluit getrokken over de gehanteerde werkmethode en de fouten die hierbij al dan niet zijn gemaakt.

De ontwerpers hopen dat dit verslag een duidelijk overzicht geeft van de manier waarop het ontwerp tot stand is gekomen.

2. Materiaalbespreking

Wanneer men voor een project iets moet bouwen is een studie van het materiaal noodzakelijk. De materiaalbespreking kan opgesplitst worden in twee hoofddelen. Het MDF, waaruit het wegdek en de vakwerken bestaan, en de verbindingen, die dienen om de vakwerken aan elkaar en aan het wegdek te monteren. Als derde punt wordt het knikfenomeen theoretisch bestudeerd en ten slotte wordt er een testcase met een driehoek uitgevoerd om na te gaan of er geen onvoorziene complicaties optreden.

2.1. Experimentele metingen

2.1.1. Trekproeven

Het materiaal voor dit project is Medium-Density Fibreboard (MDF), dit zijn gedroogde houtvezels die met harsen aan elkaar verbonden zijn. Er zijn twee diktes van MDF-platen beschikbaar: 9 mm, waaruit het wegdek bestaat, en 6 mm waaruit de vakwerken en andere verstevigingen moeten worden gemaakt.

De op voorhand gegeven waarden in verband met de sterkte en stevigheid van het materiaal zijn aan de zeer veilige kant. Omdat de brug zo licht mogelijk moet zijn, is het de bedoeling een minimum aan materiaal te gebruiken. Indien de exacte waardes gekend zijn, die hoger zullen liggen als de gegeven waardes, kan er minder materiaal gebruikt worden om dezelfde krachten op te vangen, wat een vermindering van het gewicht met zich mee brengt.

Omdat de 9 mm plaat enkel in het wegdek wordt gebruikt, en de enige vereiste is dat deze een maximale doorbuiging mag hebben van 21 mm, is het overbodig om deze op iets anders te testen dan de maximale buigspanning en doorbuiging.

De 6 mm plaat wordt gebruikt om vakwerken mee te maken. Indien de vakwerken correct gemaakt en gebruikt worden, werken hier alleen maar trek- en duwkrachten op in. De 6 mm plaat is onderworpen aan een trekproef, dit zowel in de lengte als in de breedte richting. Dit is gedaan omdat de vezelstructuur van een materiaal een invloed heeft op de maximale trekspanning die het aankan. Vermits MDF bestaat uit losse vezels die aan elkaar gelijmd zijn, zou het effect hiervan verwaarloosbaar moeten zijn. Dit is ook gebleken uit de trekproeven.

2.1.1.1. Trekproef: 6 mm – lengterichting

Er zijn in totaal 4 trekproeven uitgevoerd op plaatjes die in de lengterichting gezaagd zijn. De eerste meting is niet zo nauwkeurig omdat de proef niet helemaal correct is verlopen. De resultaten van deze trekproeven zijn als volgt:

- proef 1: maximale kracht 4452 N, doorsnede 152,2 mm², trekspanning:29,2 MPa
- proef 2: maximale kracht 4721 N, doorsnede 152,2 mm², trekspanning:31,2 MPa
- proef 3: maximale kracht 5010 N, doorsnede 152,2 mm², trekspanning:32,9 MPa

- proef 4: maximale kracht 4721 N, doorsnede 156,7 mm², trekspanning:28,0 MPa

De berekende maximale trekspanning is 30,3 MPa tegenover de gegeven richtwaarde van 20 MPa

2.1.1.2. Trekproef: 6 mm – breedterichting

Ook in de breedterichting zijn 4 trekproeven gedaan, hierbij zijn deze resultaten gevonden:

- proef 1: maximale kracht 4601 N, doorsnede 154,4 mm², trekspanning:29,8 MPa

- proef 2: maximale kracht 4365 N, doorsnede 154,4 mm², trekspanning:28,3 MPa

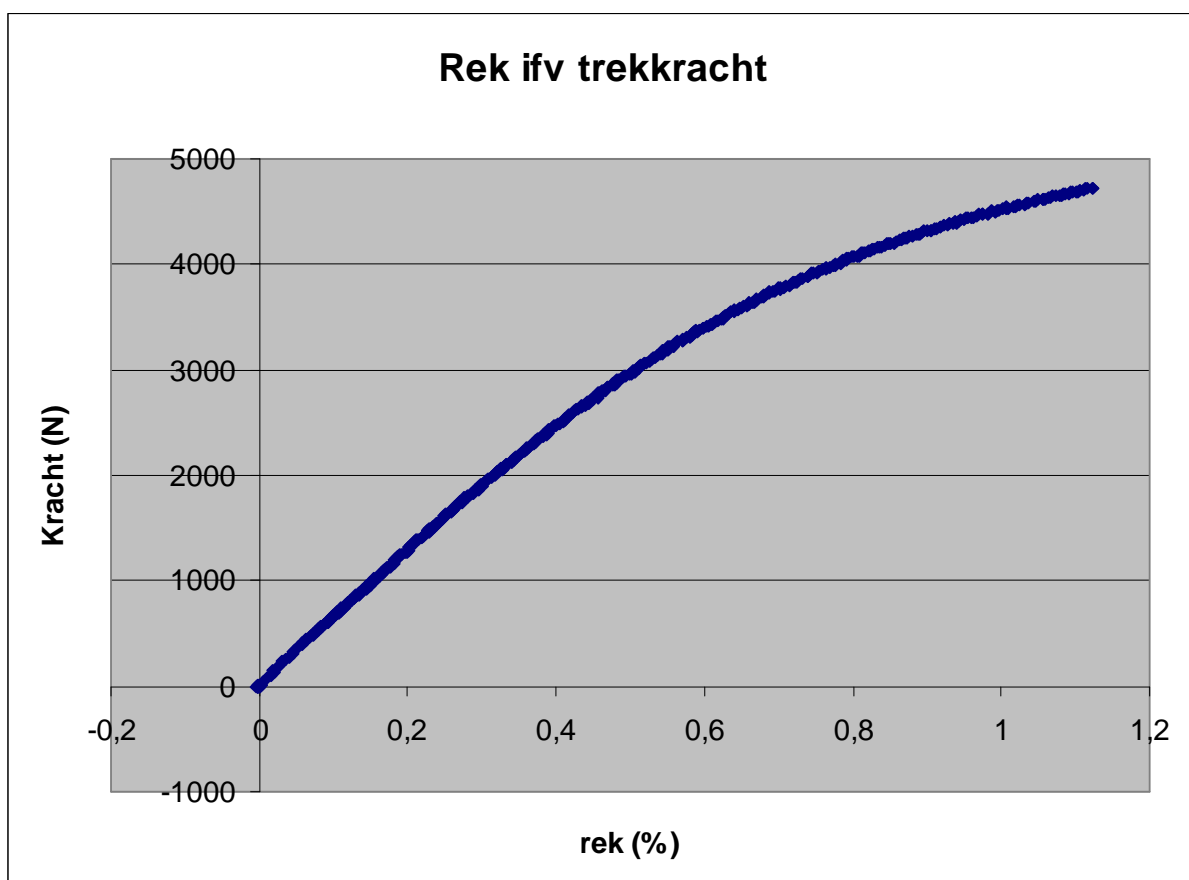
- proef 3: maximale kracht 4251 N, doorsnede 154,4 mm², trekspanning:27,5 MPa

- proef 4: maximale kracht 4421 N, doorsnede 156,7 mm², trekspanning:28,2 MPa

De maximale trekspanning opgemeten is 28,4 MPa

Zoals verwacht hangen de maximale trekspanningen voor MDF niet af van de richting waarin men trekt.

Concreet betekenen deze trekspanningen dat op een MDF-plaatje, met een breedte van 25 mm, een kracht van 4400N in trek gezet kan worden, dit komt overeen met een gewicht van 449 kg. De rek bij deze kracht bedraagt 1,09 %.

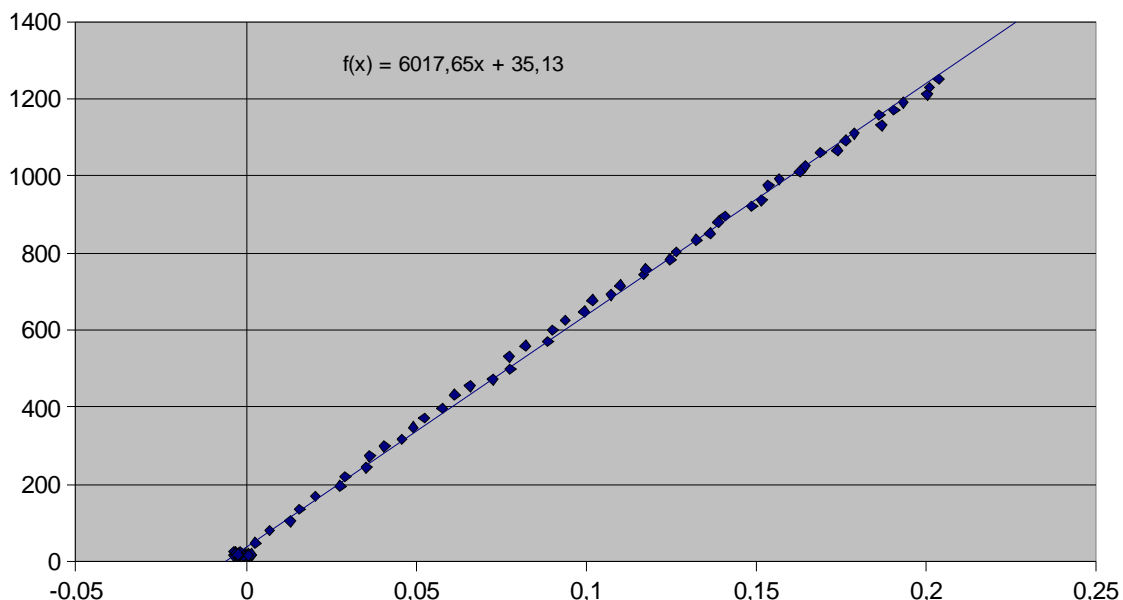


2.1.1.3. E-Modulus

De E-modulus is een maat voor de sterkte van het materiaal. Deze kan op twee manieren berekend worden. Een eerste is door de raaklijn aan het lineair gedeelte van de trekcurve te nemen. De richtingscoëfficiënt is dan gelijk aan de E-modulus. De tweede manier is om gebruik te maken van de 'resonalyser'. Deze tweede manier is niet-destructief, en is dus als eerste uitgevoerd. De eerste resonantiefrequentie van een staafje is functie van massa, inklemming, geometrie en stijfheid, maar als men een lengte neemt die groter is dan 50x de dikte, zal men merken dat de resonantiefrequentie vooral functie is van de buigstijfheid. De E-modulus wordt dan gegeven door de volgende formule:

$$E = 0,946 \frac{M \cdot f^2 \cdot L^3}{B \cdot d^3}$$

- met E: E-modulus van het materiaal in de longitudinale richting van het balkje
 M: massa van het balkje
 f : gemeten resonantiefrequentie + correctie t.g.v. de massa van de accelerometer
 L: lengte van het balkje
 B: breedte van het balkje
 d: dikte van het balkje



Deze proef gaf als resultaat een E-modulus van 5 GPa. De tweede methode bestaat er gewoon in om bij de trekcurve, dit is de kracht uitgezet tegen de rek, alleen het lineaire gedeelte van de grafiek te beschouwen, dit is tot ongeveer een rek van 0,2% en hiervan door Microsoft Excell de raaklijn te laten berekenen. De waarde van de richtingscoëfficiënt van deze raaklijn komt overeen met de E-modulus in MPa.

Proef 1: E-modulus 8,8 GPa (deze waarde werd verworpen)

Proef 2: E-modulus 6,4GPa

Proef 3: E-modulus 6,5GPa

Proef 4: E-modulus 6,1 GPa

Proef 5: E-modulus 5,4 GPa

Proef 6: E-modulus 6,0 GPa

Proef 7: E-modulus 6,2 GPa

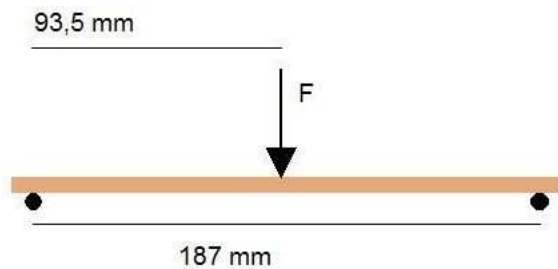
Proef 8: E-modulus 5,9 GPa

Uit de 8 grafieken van de trekproeven is gebleken dat de E-modulus gelijk is aan 6,1 GPa. De resonalyser geeft een waarde aan van 'slechts' 5 GPa, maar deze geeft altijd een waarde weer die iets lager ligt dan de echte waarde. De berekende E-modulus is dus 6 GPa en dit tegenover 3GPa als richtwaarde. Dit is een factor 2 verschil en zorgt dus voor een grote reductie in gewicht. Uit veiligheid zal er gewerkt worden met een E-modulus van 5,5 GPa.

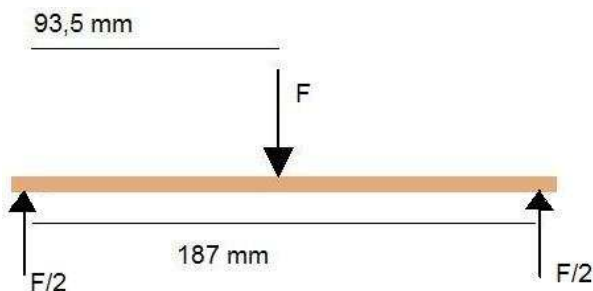
2.1.2. Buigproeven

Eén van de hoofdcriteria van de brug is dat de doorbuiging maximaal 1% van de totale lengte van de brug mag bedragen. Een materiaal kan falen door een te groot inwendig buigmoment. Wegens deze redenen is een degelijk onderzoek naar de buigspanning van MDF onontbeerlijk.

De proef bestaat erin een sample MDF met bepaalde afmetingen te belasten volgens onderstaande figuur.

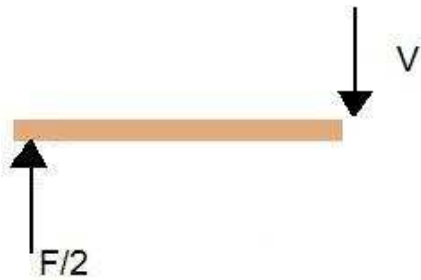


Het vrijlichaamschema ziet er als volgt uit:



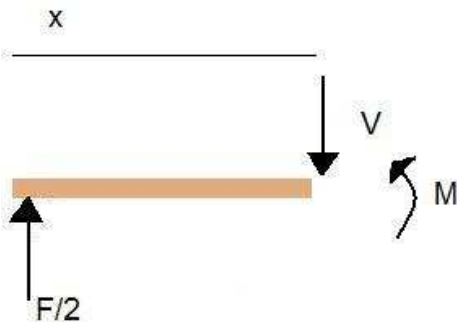
$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ M = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Beide steunpuntreacties} = \frac{F}{2}$$

Bepalen van de dwarskrachten:



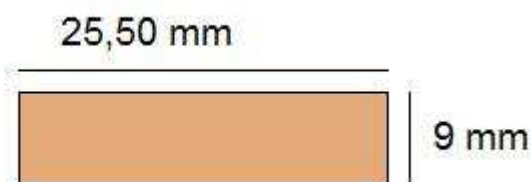
$$\sum F_y = 0 \text{ dus } V = \frac{F}{2}$$

buigmoment:



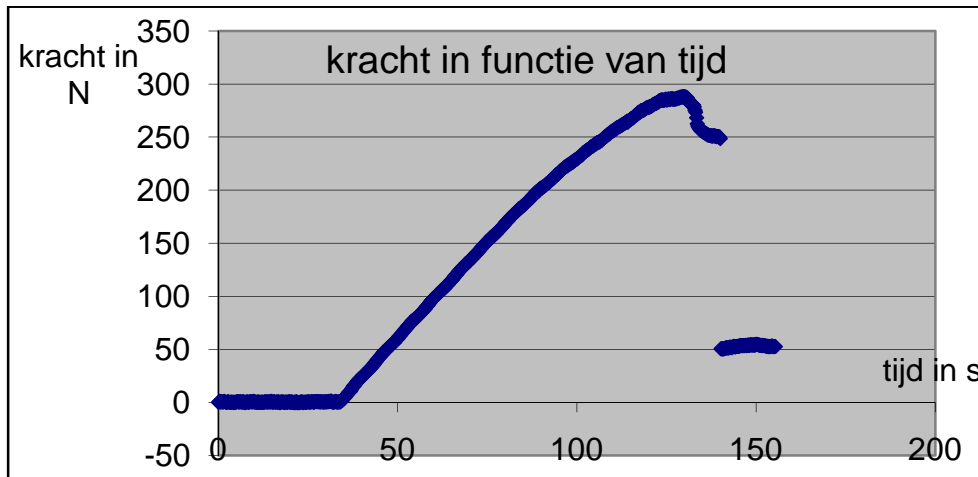
$$M - \frac{F}{2} * x = 0 \quad M = \frac{F}{2} * x \quad M \text{ is maximaal voor een } x \text{ van } 93,5 \text{ mm.}$$

De hakformule wordt gebruikt voor het berekenen van de buigspanning. Ze ziet er als volgt uit: $\sigma = -M * y/I$ waarbij I het traagheidsmoment is. Als men naar de doorsnede van het sample MDF kijkt, dan ziet men dat de buiging rond de as evenwijdig is met de 25,5 mm lengte-aanduiding. De afstand y neemt men zodanig dat de spanning maximaal is, namelijk de helft van 9mm.



2.1.2.1. Resultaat van de proef

Met de data die weergegeven worden door de machine, kan men een grafiek maken die er uitziet zoals onderstaande grafiek. Men is enkel geïnteresseerd in de maximale waarde van de grafiek. Met deze maximale waarde berekent men dan de maximale buigspanning.



Nadat de drie proeven zijn uitgevoerd, kan men het gemiddelde nemen en komt men bij een kracht van 282,7N. Dit komt overeen met een maximaal moment van 13,2 N*m. De formule voor het traagheidsmoment rond de neutrale as is $b * h^3/12$ en is in dit geval gelijk aan $15 * 10 - 10 m^4$. De maximale buigspanning is dan gelijk aan 38,3MPa. Aangezien 35MPa als veilige waarde voor de maximale buigspanning werd opgegeven is een experimentele waarde van 38,3MPa een bevredigend resultaat.

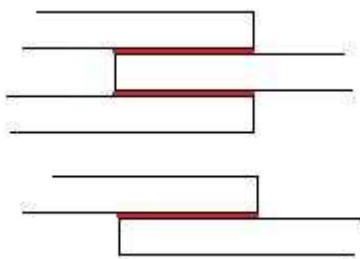
2.2. Verbindingen

2.2.1. Lijm

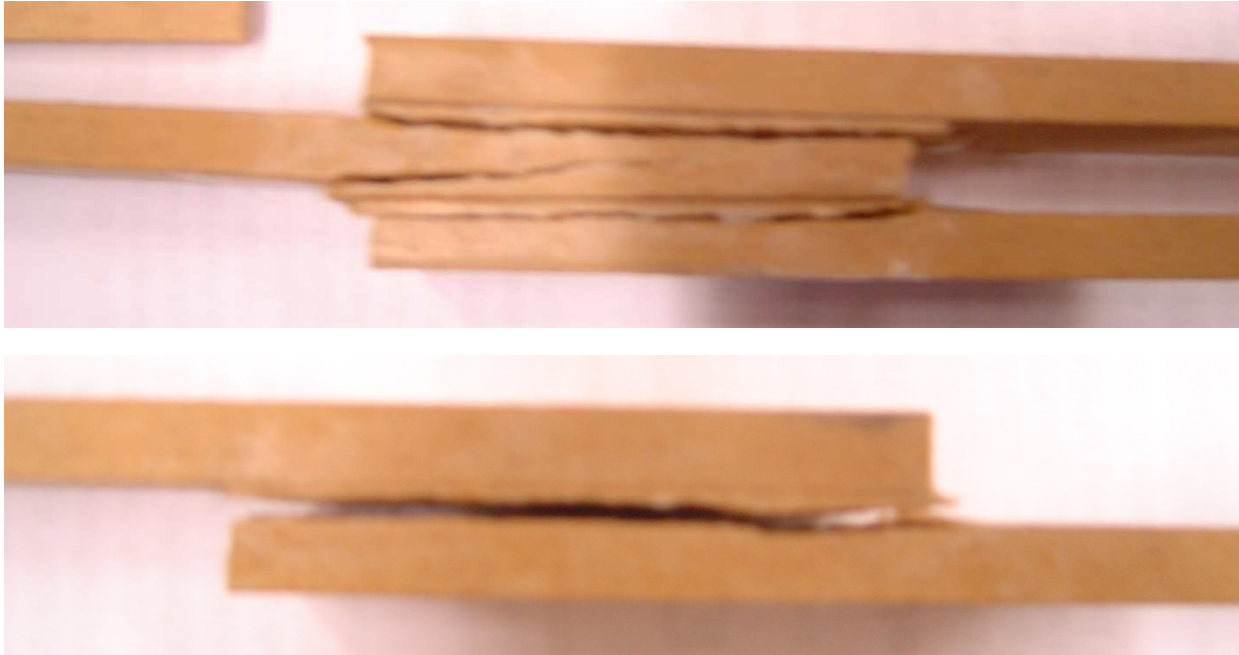
Naast boutverbindingen is het mogelijk de plankjes te lijmen. Dit is nodig als er bredere, vierkante staven of kokers gemaakt moeten worden voor elementen in druk. De lijmverbindingen zijn dan ook grondig getest geweest.

2.2.1.1. Afschuiving

Om de kracht van de lijm op afschuiving te testen werden de volgende verbindingen geconstrueerd:

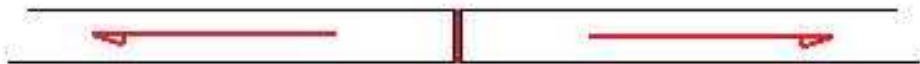


Na de trekproef bleek dat de houtlijm zelf niet gefaald had, maar dat de interne lijm van de MDF het begeven had. Dit zorgt ervoor dat geen extra berekeningen uitgevoerd moeten worden om na te kijken of de houtlijm het wel zal houden. De interne lijm faalde bij een spanning van 2 MPa.



2.2.1.2. Trek

Om de sterkte van de houtlijm in trek te testen werd de volgende verbinding uitgevoerd:



Hierbij faalde de houtlijm wel, namelijk bij een kracht van 1247 N. Het gelijmde oppervlak was 156 mm² groot, dit geeft dus een trekspanning van 7.99 MPa

2.2.2. Bouten

De elementen moeten met elkaar verbonden worden tot een vakwerk. Men moet dus verbindingen maken. Er is keuze tussen lijm- en boutverbindingen. Hieronder volgt een overzicht van de mogelijkheden met boutverbindingen, voor- en nadelen en dimensionering.

Voordelen van boutverbindingen

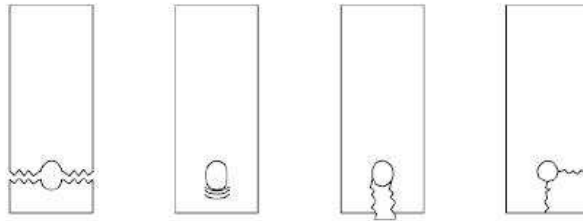
- De bouten zelf zijn zeer sterk, zeker ten opzichte van een materiaal zoals MDF
- Perfect om scharnierverbindingen te maken

Nadelen van boutverbindingen

- Spanningsconcentraties rondom de boutgaten
- Verzwakking in het materiaal
- Verminderde esthetiek
- Ontstaan van parasitaire momenten

2.2.2.1. Faalmechanismen

Er zijn verschillende manieren waarop een boutverbinding kan falen.



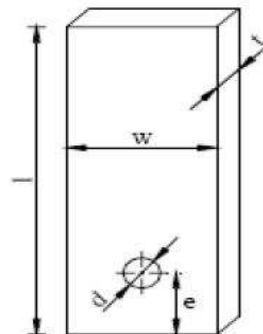
Figuur: netto doorsnede, stuik, afschuiving en klieven

Voor elk verschijnsel is er een formule zodanig dat de spanning berekend kan worden waarbij het faalt.

Voor lineair elastische materialen:

- $\sigma_{netto,sectie} = \frac{3}{2} * \frac{F}{(w-d)*t}$
- $\sigma_{stuik} = \frac{3}{2} * \frac{F}{d*t}$
- $\sigma_{afschuiving} = \frac{F}{2*e*t}$

W= breedte van het sample
 d= diameter van de bout
 e= afstand tot het middelpunt
 t= dikte van het sample



Figuur: sample met afmetingen

De moeilijkheid is te weten te komen op welke manier de verbinding gefaald is bij de proef. Indien men de verbinding bekijkt na het falen is het moeilijk te zeggen of de verbinding nu in netto doorsnede, stuik, afschuiving of klieven gefaald is. Al deze fenomenen doen zich tegelijkertijd voor. Men moet dus voor elke manier van falen de spanning berekenen en de elementen zodanig dimensioneren dat men onder de spanning van elke mogelijke manier van falen blijft.

2.2.2.2. Aantal bouten

Het voordeel van pakweg 2 bouten per verbinding te gebruiken is dat de spanningsconcentraties als gevolg van een gat in het MDF-element afnemen. Het is te zeggen: ze zijn verdeeld over twee gaten. Hiermee kan men stuik, afschuiving en klieven tegengaan. Wat betreft het probleem van breken

langs de netto doorsnede maakt dit geen verschil en om de andere manieren van falen tegen te gaan zijn er oplossingen zoals e of t groter maken. Maar de belangrijkste reden dat men slechts 1 bout neemt is dat men anders geen scharnierende verbinding heeft.

2.2.2.3. De proef

Het sample heeft volgende afmetingen: plaatje: 6mm op 25,5mm, diameter bout: 6mm. Hieronder worden de kracht en bijhorende spanning bij falen getoond.

- enkele overlapping: 1400N
- dubbele overlapping: 2000N

Men kan dan de spanningen uitrekenen voor alle mogelijke manieren van falen. Hierop wordt de veiligheidsfactor 2 genomen en de eigenlijke spanningen worden dus gedeeld door 2.

$\sigma_{\text{netto,sectie}}$	9MPa
σ_{stuijk}	29MPa
$\sigma_{\text{afschuiving}}$	4MPa

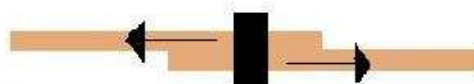
Met deze gegevens kan men dan voor elk element in trek de afmetingen berekenen.

2.2.2.4. Parasitaire momenten

De keuze tussen enkele overlapping en dubbele overlapping moet gemaakt worden.



Het probleem bij enkele overlapping is dat de krachten in de staven niet in elkanders verlengde liggen. Hierdoor krijgt men een moment, parasitair moment genaamd.



figuur: parasitair moment bij enkele overlapping

Enkele overlapping

- eenvoudig
- men wint plaats
- smalle verbinding
- problemen met parasitair moment

Dubbele overlapping

- geen last van parasitair moment
- dikke verbinding
- meer materiaalgebruik
- moeilijk een volledig vakwerk mee te maken, een driehoek lukt niet

2.3. Optimale elementen in knik

Bij het dimensioneren van de drukstaven is de belangrijkste factor waar rekening mee gehouden moet worden de kritische spanning waarbij de staven knikken. Bij het ontwerpen van een vakwerk worden de lengtes van alle staven, dus ook drukstaven, bepaald. Daarbij moet de berekende normaalkracht in rekening worden gebracht om zo de vorm van de nodige staaf te bepalen. Dit betekent dat de lengte van de staaf en de minimale normaalkracht die hij zou moeten weerstaan zonder uit te knikken, vast liggen. De opdracht vereist bovendien een veiligheidsfactor 2 op de minimaal te weerstande normaalkracht. Het is handig om op voorhand enkele soorten staven te berekenen, zodanig dat men na het ontwerpen van het vakwerk, aan de hand van de berekende lengtes en normaalkrachten, meteen kan nagaan welke staven het best voldoen.

Voor deze berekeningen wordt volgende formule gebruikt:

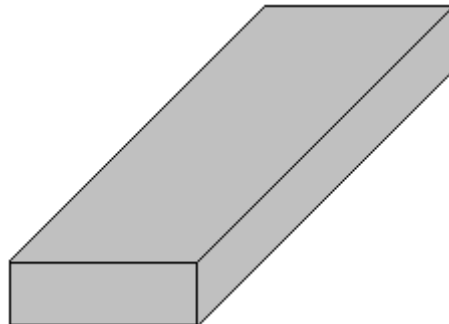
$$P_{krit} = \frac{C \pi^2 EI}{0,9 L^2}$$

$$\Leftrightarrow L = \pi \sqrt{\frac{C EI}{0,9 P_{krit}}}$$

P_{krit} = kritische kracht
 C = constante afhankelijk van de aanhechting
 $0,9$ = veiligheidsfactor
 E = E – modulus van het gebruikte materiaal
 I = traagheidsmoment staaf om instabiele as
 L = lengte staaf

Hier volgen een paar voorbeelden van op voorhand berekende staven.

2.3.1. Standaard balk (6,15x25,60mm)



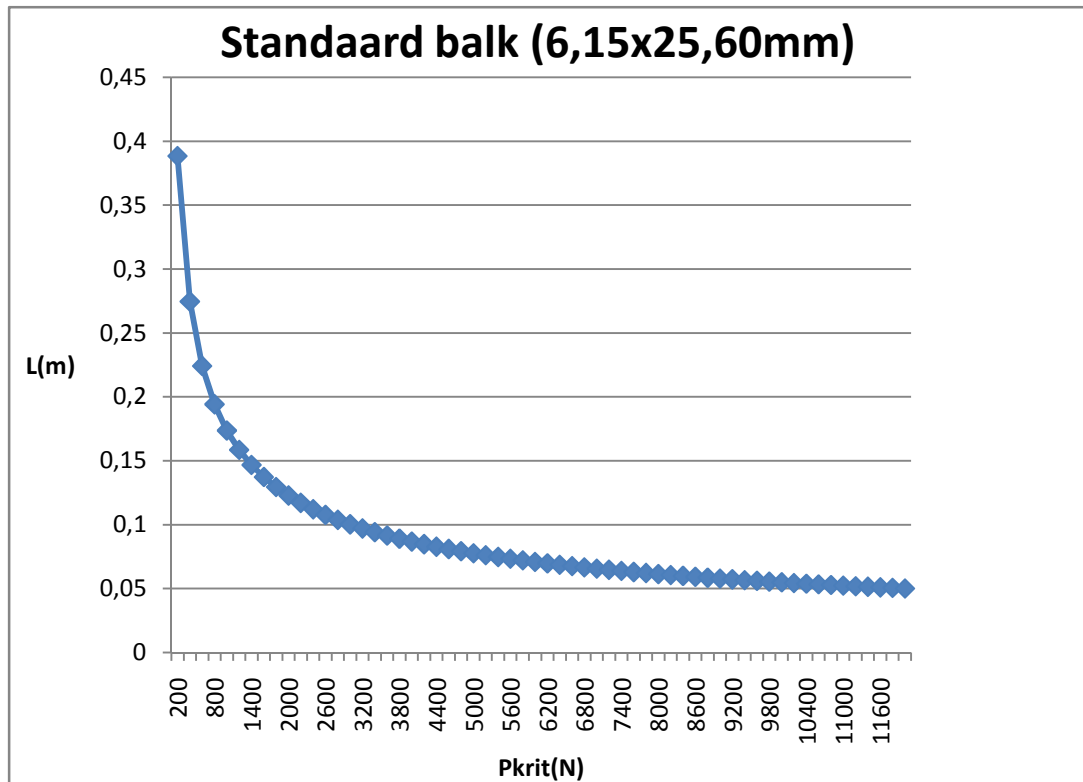
$$b = 6,15 \cdot 10^{-3} m$$

$$h = 25,60 \cdot 10^{-3} m$$

$$I = \frac{b^3 h}{12} = 5 \cdot 10^{-10} m^4$$

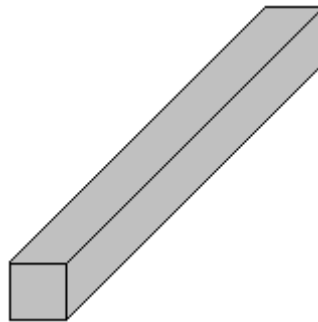
$$E = 5,5 \text{ GPa (materiaalconstante MDF)}$$

$$C = 1 \text{ (in het bestudeerde geval)}$$



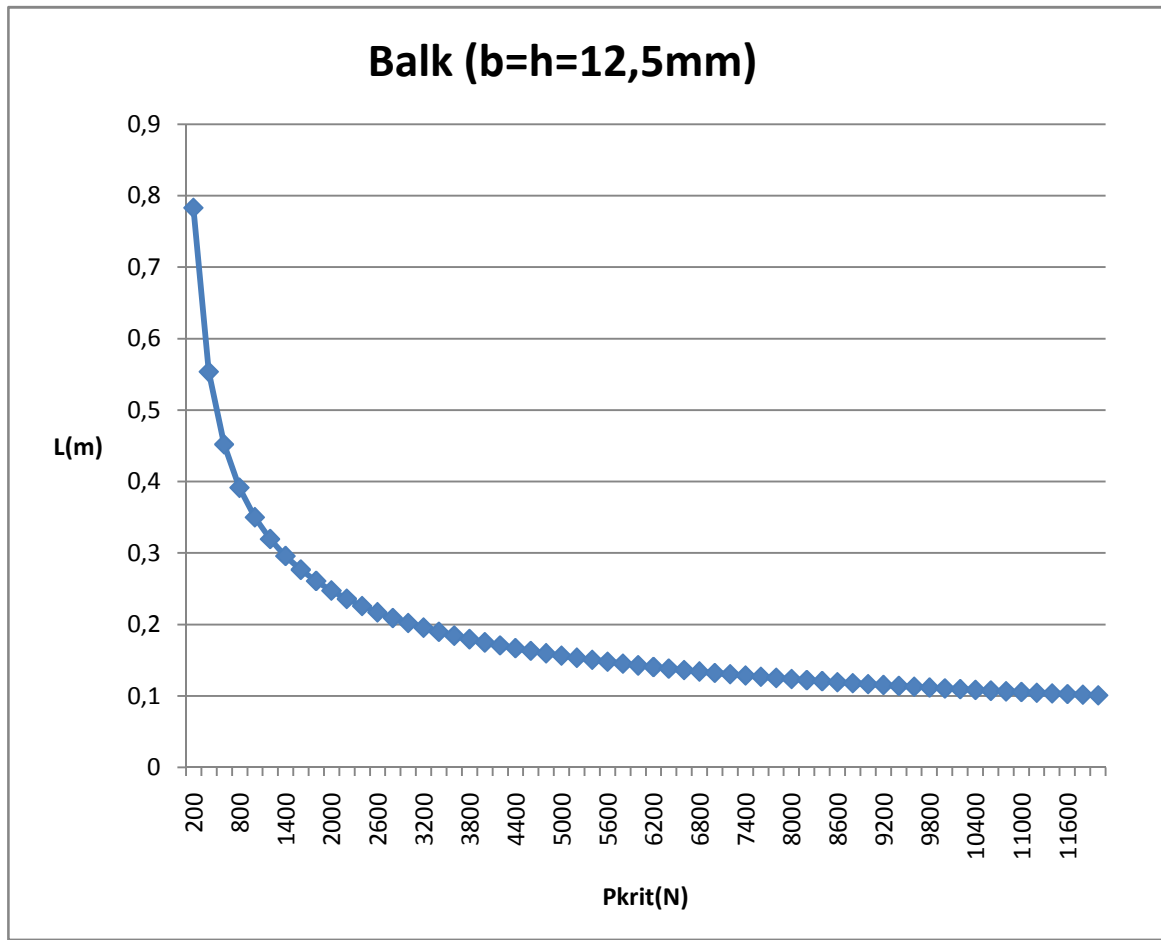
Het voordeel aan dit soort staven is het relatief lage materiaalgebruik, wat met oog op gewicht zeer gunstig is. Uiteraard kunnen de breedte en hoogte makkelijk worden aangepast. Het nadeel is dat dit soort staven enkel bij relatief kleine lengtes voldoende spanning aankunnen.

2.3.2. Balk (b=h):



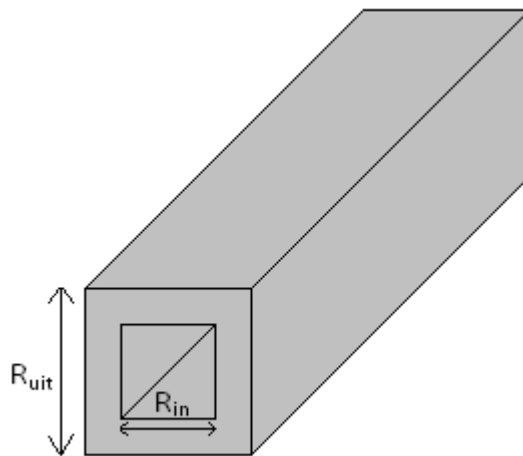
$$b = h = 12,5 \cdot 10^{-3} m$$

$$I = \frac{b^4}{12} = 2 \cdot 10^{-9} m^4$$



Door het grotere traagheidsmoment kunnen deze staven bij grotere lengtes nog voldoende kracht aan, bovendien is in dit geval het materiaalgebruik ongeveer hetzelfde als bij de hierboven besproken standaard balk van 6,15mm bij 25,60mm. Als we deze namelijk in de lengte doorsnijden en de helften op elkaar bevestigen krijgen we een balk met basis en hoogte gelijk aan ongeveer 12,5mm.

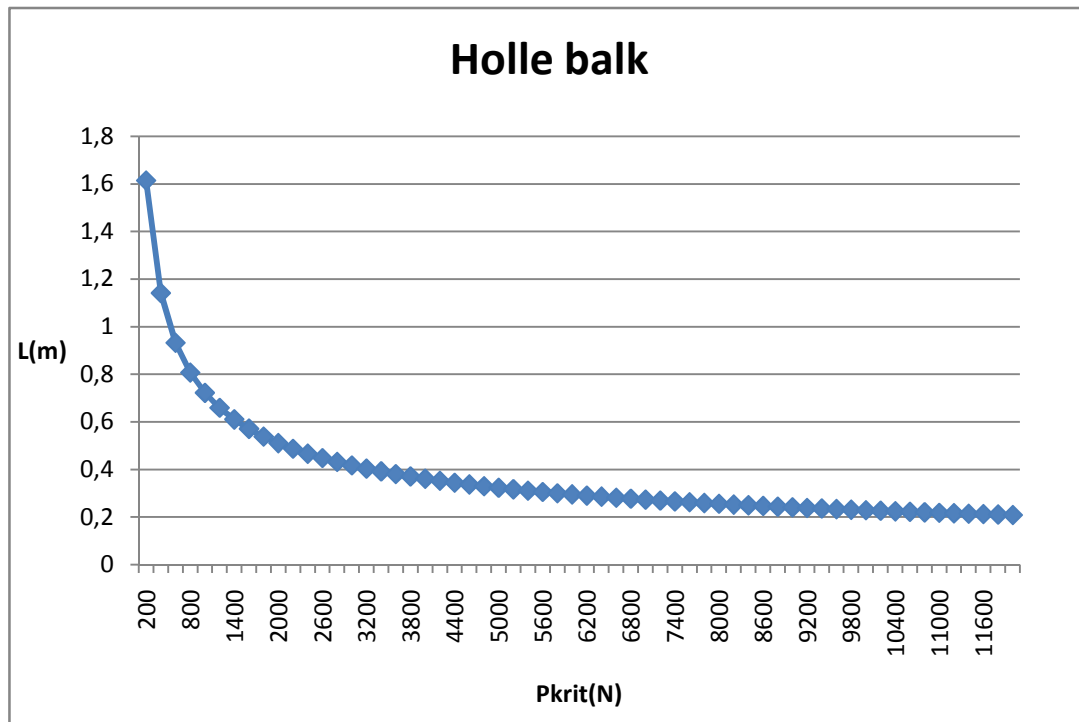
2.3.3. Holle balk:



$$R_{in} = 6 \cdot 10^{-3} m$$

$$R_{uit} = 18 \cdot 10^{-3} m$$

$$I = \frac{R_{uit}^4}{12} - \frac{R_{in}^4}{12} = 8,64 \cdot 10^{-9} m^4$$



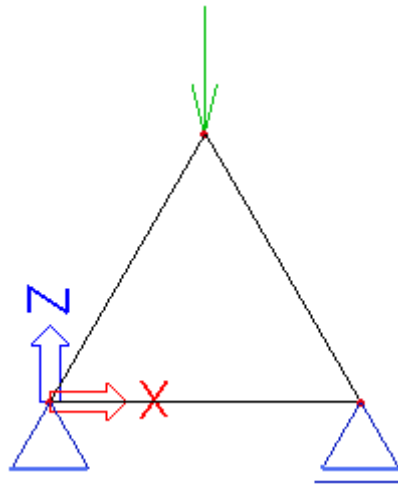
De holle balk kan bij grote lengtes nog hoge krachten aan door het grote traagheidsmoment. Er is weliswaar meer materiaal voor nodig dan voor een standaard balk. Voor de opgegeven opdracht gaan holle balken waarschijnlijk zorgen voor overdimensionering.

2.4. Driehoek als testcase

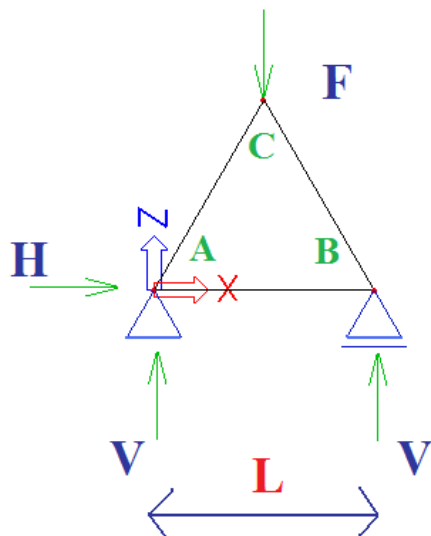
Alvorens te starten met de ontwikkeling van een bruikbaar vakwerk werd er een driehoek gedimensioneerd en onderworpen aan verschillende tests. Het doel hiervan was na te gaan of er geen randfenomenen over het hoofd werden gezien inzake falen van staven en om eens een complexere structuur te testen dan enkel een staaf of een verbinding.

2.4.1. Berekeningen

Om een isostatisch stelsel te creëren werd er uitgegaan van een scharnier en een roloplegging als steunpunten voor de driehoek. Om de inwerkende krachten van een geheel vakwerk te simuleren koos men voor een puntlast op de bovenste knoop.



Omdat er in geen enkel punt twee onbekende krachten aankomen kon er gebruik worden gemaakt van de methode van Cremona om de krachten in de staven te bepalen. Dit had als doel na te gaan wat de geschikte doorsnede zou zijn om de driehoek te testen op het falen van de staven. Voordat de methode van Cremona kon worden toegepast, moesten eerst nog de reactiekrachten bepaald worden. Dit gebeurde door het oplossen van het isostatisch stelsel (voor de eenvoud werd uitgegaan van een gelijkzijdige driehoek):



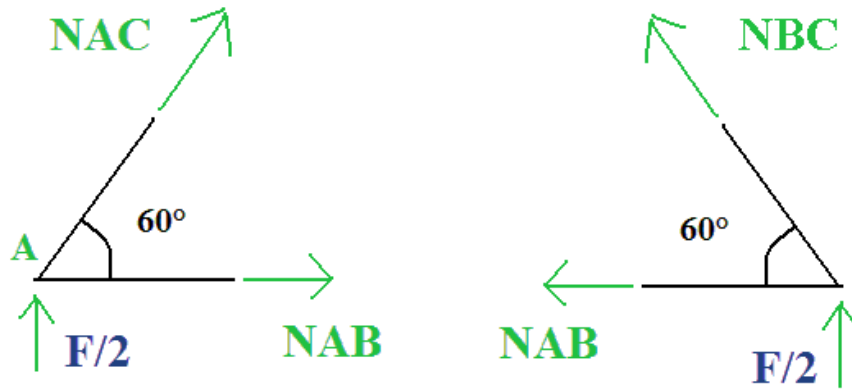
$$\text{HE: } H_A = 0$$

$$\text{VE: } V_A + V_B = F$$

$$\text{ME}_A: V_B * L = F * L/2$$

$$\text{Oplossen geeft: } V_A = V_B = F/2$$

Wanneer er nu 2 snedes worden genomen kan men met behulp van de krachtenveelhoek in de twee onderste knopen de normaalkrachten in de drie staven bepalen.



Snede 1:

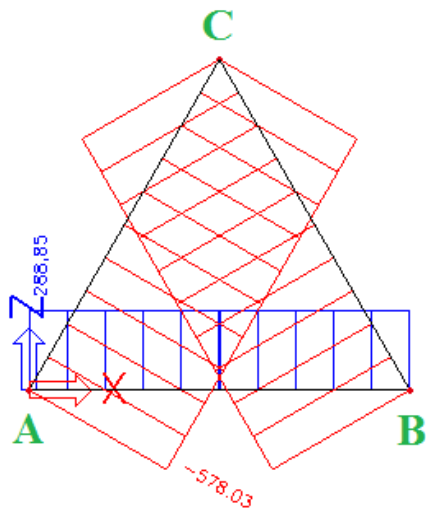
$$N_{AC} * \cos 60^\circ = -N_{AB}$$

$$N_{AC} * \sin 60^\circ = -\frac{F}{2} \Leftrightarrow N_{AC} = -\frac{\sqrt{3}}{3} * F \quad \Leftrightarrow \quad N_{AB} = \frac{\sqrt{3}}{6} * F$$

Snede 2:

$$N_{BC} * \sin 60^\circ = -\frac{F}{2} \Leftrightarrow N_{BC} = -\frac{\sqrt{3}}{3} * F$$

Zoals men ziet volstaat het in het geval van een gelijkbenige driehoek om slechts één snede te nemen. Wat men al kon aanvoelen wordt hier aangetoond: de onderste staaf wordt belast in trek, de andere twee in druk. Wanneer men nu $F = 1$ kN neemt dan ziet men dat Scia Engineer dezelfde resultaten geeft.



Wanneer men deze staafkrachten nu kent, komt het er dus op aan de staven te dimensioneren en de maximaal inwerkende krachten te berekenen zodat men kan voorspellen wanneer de driehoek gaat falen en op welke manier.

Zoals hierboven reeds is aangetoond, is de spanning waarbij de staven falen voor zowel trek als druk gelijk aan 28 MPa. De staaf in trek moet enkel worden nagekeken op sterkte terwijl de staven in druk op zowel sterkte als knik moeten worden gecontroleerd.

Staaf in trek:

$$\sigma = \frac{NAB}{A} = \frac{NAB}{b \cdot h}$$

Er werd gekozen voor $b = 9 \text{ mm}$ en $h = 25.5 \text{ mm}$.

$$\sigma_{max} = 28 \text{ MPa} \leftrightarrow NAB, max = 28 \text{ MPa} * 9 \text{ mm} * 25,5 \text{ mm} = 6426 \text{ N}$$

$$\leftrightarrow Fmax = \frac{6}{\sqrt{3}} * NAB, max = \frac{6}{\sqrt{3}} * 6426 \text{ N} = 22260 \text{ N}$$

Staven in druk:

Sterkte:

$$NAC, max = NBC, max = 6426 \text{ N}$$

$$\leftrightarrow Fmax = \frac{3}{\sqrt{3}} * 6426 \text{ N} = 11130 \text{ N}$$

Knik:

De formule die wordt gebruikt voor het berekenen van de kritische kracht waarbij de drukstaven kunnen falen op knik bij vakwerken is:

$$PCr = C' \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

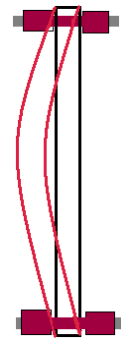
Met $C' = \frac{C}{0,9}$ om de rotatiestijfheid in rekening te brengen

Omdat de staven zullen uitknikken volgens het kleinste traagheidsmoment, wat dus loodrecht op het vlak van de driehoek is, kan er hier niet meer gesproken worden van twee scharnierende verbindingen. Volgens de richting waarin de knik zal gebeuren worden de staven ingeklemd waardoor $C = 4$.

Als men weet dat $I = \frac{b \cdot h^3}{12}$, $E = 3 \text{ GPa}$ en als lengte van de staven 40 cm kiest, dan geeft dit als resultaat:

$$PCr = \frac{4 \pi^2 * 3 \text{ GPa} * 25,5 \text{ mm} * (9 \text{ mm})^3}{0,9 * 12 * (0,40 \text{ m})^2} = 1274 \text{ N} = NBC, max = NAC, max$$

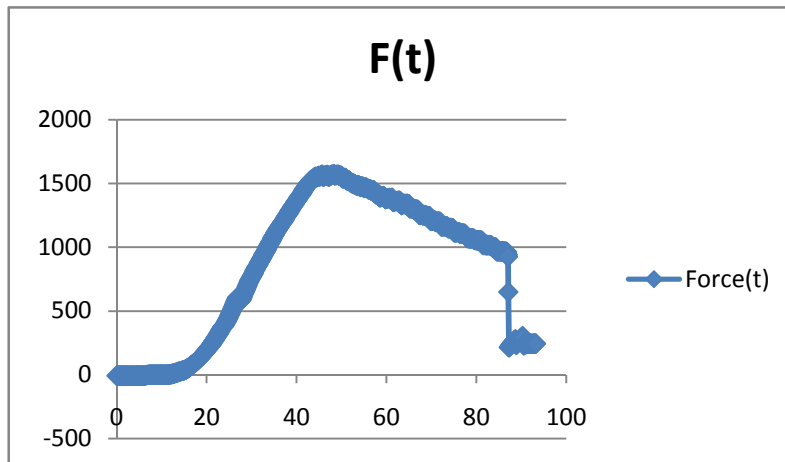
$$\leftrightarrow Fmax = \frac{3}{\sqrt{3}} * 1274 = 2207 \text{ N}$$



Op deze manier stelt men dus vast dat de twee bovenste staven van de driehoek gaan falen op knik. Omdat het doel van dit experiment was om enkel het falen van de staven na te gaan is er voor de boutverbindingen telkens uitgegaan van een excentriciteit en een dikte van de staven die groot genoeg is zodat de verbindingen niet kunnen falen binnen het geteste krachtbereik.

2.4.2. Testen

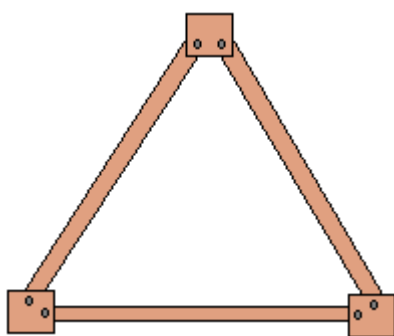
Om na te gaan of deze theoretische resultaten ook in de praktijk tot uiting kwamen werd de driehoek aan een drukproef onderworpen. In deze drukproef werd de opgelegde kracht lineair met de tijd verhoogd. Deze test gaf volgend resultaat:



Zoals men kan zien neemt de kracht lineair toe tot aan een grens van ongeveer 1600 N, vanaf hier neemt de kracht af en zoals te zien was tijdens de proef kwam dit omdat de bovenste twee staven begonnen uit te knikken.

De vraag is natuurlijk waarom de bovenste staven al in knik gaan bij 1600 N in de plaats van de berekende 2207 N. De voornaamste oorzaak hiervan schuilt in het volgende:

Op de figuur ziet men een schets van de driehoek zoals hij werd geconstrueerd voor de proef. Zoals



men kan zien zijn de scharnieren die men gebruikt voor het berekenen van de faling van de driehoek niet zoals een scharnier volgens de theorie gedefinieerd is. Men kan echter heel moeilijk een theoretisch perfecte scharnier maken in de praktijk. Ofwel heeft men last van parasitaire momenten, ofwel komen de staven niet in hetzelfde punt, het scharnierpunt, samen. Omdat het hoofddoel van deze test was om staven in een structuur te testen, wou men dit op een manier doen waarbij men geen last heeft van parasitaire momenten. Dan zou men sowieso een ander resultaat bekomen als men berekend had.

De oplossing die werd gebruikt om geen parasitaire momenten te verkrijgen is weergegeven op de figuur. Theoretisch gezien is dit een zeshoek, maar omdat de drie toegevoegde zijden zo klein zijn zou men kunnen denken dat dit geen probleem is. Na montage heeft men gezien dat deze driehoek alles behalve vormvast is omdat het eigenlijk geen driehoek maar een zeshoek is. Door deze vaststelling werd men veel wijzer over verbindingen, alhoewel dat dit niet het hoofddoel was van de test. Om de test toch uit te voeren was het nodig dat er een oplossing bedacht werd voor dit over het hoofd geziene probleem. Men heeft dan de plaatjes onderaan de driehoek rechthoekig gemaakt zodat ze het bewegen van de driehoek blokkeren. Op deze manier was men in staat de test alsnog uit te voeren. Het nadeel hierbij is echter wel dat de hartlijnen van staven niet meer op de juiste plaats samenkomen.

2.4.3. Conclusie

Het gebruik van plaatjes is praktisch en esthetisch gezien veel aangenamer maar heeft als grote nadeel dat het zorgt voor neveneffecten die niet in de theoretische berekeningen over vakwerken voorzien zijn, daarom is deze verbindingstechniek af te raden. Bovendien kan men met plaatjes problemen hebben op vlak van vormvastheid. Hierdoor zou men de lengtes van de staven moeten aanpassen aan de snijpunten van de hartlijnen binnen de plaatjes. Omdat dit het probleem complexer maakt en deze plaatjes voor meer massa zorgen, werd er binnen het kader van deze opdracht gekozen voor gewone boutverbindingen.

3. Ontwerp van de brug

In dit hoofdstuk zal het ontwerpen van de brug besproken worden. Om tot het optimale vakwerk te komen werd er als volgt te werk gegaan: eerst werden de punten bepaald waar het vakwerk zou aangrijpen aan het wegdek, daarna werden de optimale plaatsen voor de knooppunten bepaald en tenslotte werd alles ingevoerd in SCIA om een beter beeld te hebben over de brug en de laatste verbeteringen aan te brengen.

3.1. Optimalisatieoefening

De optimalisatieoefening is de eerste stap in ons ontwerpproces. Hiermee bepalen we hoeveel punten van het vakwerk aan het wegdek komen en op welke plaatsen. We zullen het programma bespreken dat gebruikt is om deze oefening op te lossen en het resultaat van de oefening.

3.1.1. Theoretisch

In dit deel wordt het opgegeven probleem besproken en opgelost. De oplossing is de leidraad voor het bouwen van de brug. De bekomen formules voor onder andere het moment in elk punt ten gevolge van de opgelegde belasting en in aanwezigheid van een bepaald aantal steunkrachten werden vervolgens in een algoritme geprogrammeerd. Dit algoritme verzorgt de eigenlijke optimalisatie. Het is dus de bedoeling om de oefening schriftelijk uit te werken en de resultaten te bepalen zodat ze makkelijk kunnen worden geïmplementeerd in een optimalisatiealgoritme.

Probleem:

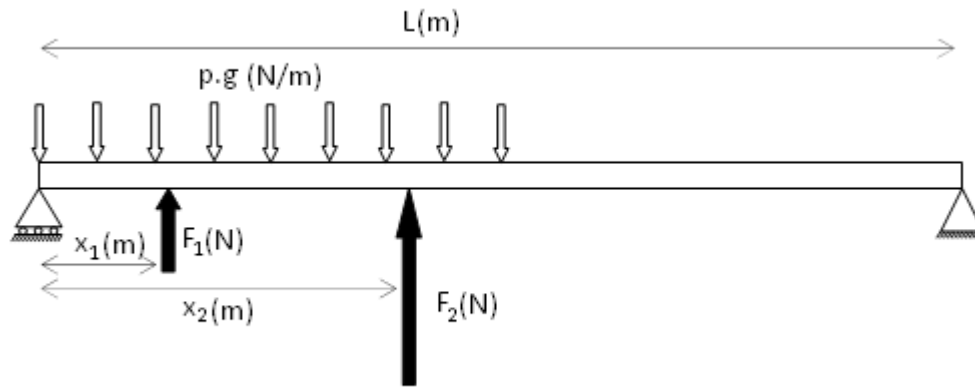
Een isostatisch opgelegde balk wordt over de helft van zijn overspanning ($L = 2,10\text{m}$) belast door een homogeen verdeelde belasting p ($p \cdot l = 20\text{kg}$). Men wenst het maximaal buigmoment in deze balk te minimaliseren door het aanbrengen van enkele opwaartse puntlasten. De grootte en positie van deze puntkrachten zijn vrij te kiezen.

Gevraagd:

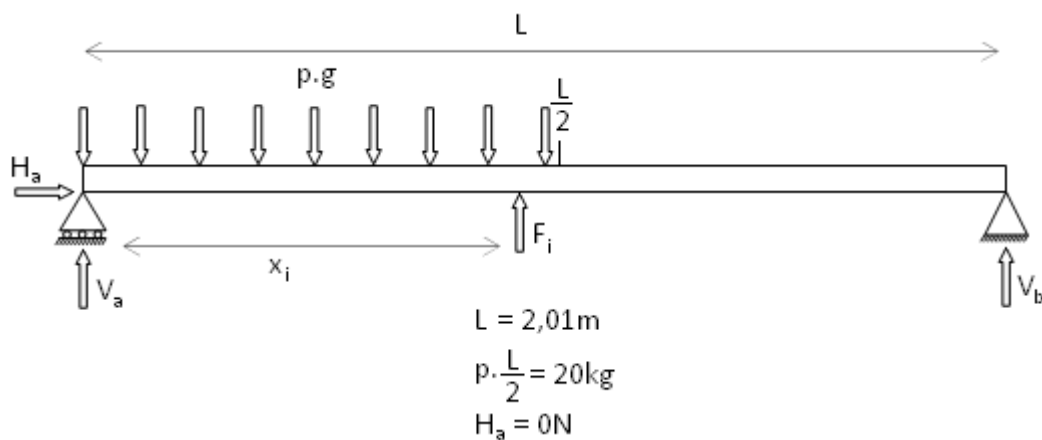
Bepaal het maximaal buigmoment bij afwezigheid van opwaartse puntkrachten

Bepaal de optimale grootte en positie om het maximale buigmoment in de balk te minimaliseren. Doe dit voor respectievelijk 1 en 2 opwaartse krachten.

Geef overzichtelijk het gevonden maximaal buigmoment weer in functie van het aantal 'steunkrachten'. (Kan men hieruit besluiten trekken voor andere overspanningen L en belastingsgroottes p ?)



Oplissing:



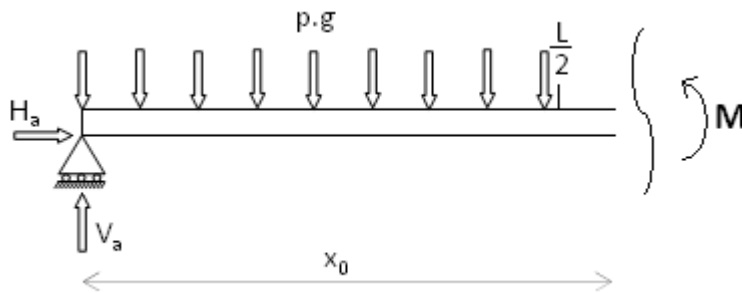
Er wordt gevraagd te werken met 1 en 2 opwaartse krachten, maar er worden hier n gekende krachten F_i met overeenstemmende posities x_i veronderstelt. Dit met het oog op de optimalisatie van de brug, waarbij meerdere steunpunten waarschijnlijk wenselijker gaan zijn. De krachten F_i en posities x_i zullen uiteindelijk berekend worden door het geprogrammeerde algoritme.

We beginnen met het berekenen van de reactiekrachten V_a en V_b :

$$\begin{cases} V_a + V_b - \frac{pLg}{2} + \sum_{i=1}^n F_i = 0 \\ V_b L - \frac{pL^2g}{8} + \sum_{i=1}^n F_i x_i = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} V_a = \frac{3pLg}{8} - \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{x_i}{L}\right) F_i \\ V_b = \frac{pLg}{8} - \frac{1}{L} \sum_{i=1}^n F_i x_i \end{cases}$$

Nu we de reactiekrachten kennen, kunnen we aan de hand van snedes het moment in elk punt van de brug berekenen. We onderscheiden twee verschillende snedes, namelijk van het belaste deel van de brug en voorbij het belaste deel. In elk van deze snedes onderscheiden we twee gevallen: de opwaartse krachten liggen voorbij de snede of vallen erbinnen.



Snede 1: $x_0 > \frac{L}{2}$, $x_i > x_0$

$$M: M_1 - V_a x_0 + \frac{pLg}{2} \left(x_0 - \frac{L}{4} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow M_1 = \frac{pL^2g}{8} - \frac{pLgx_0}{8} - x_0 \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{x_i}{L} \right) F_i$$

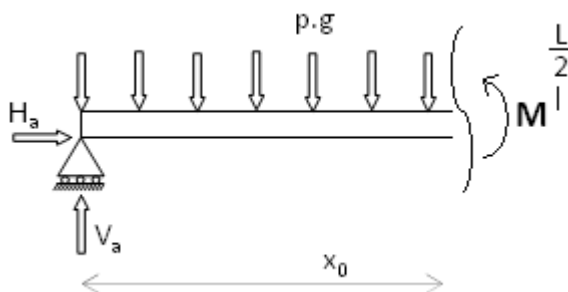
Snede 2: $x_0 > \frac{L}{2}$, $x_i < x_0$

$$M: M_2 - V_a x_0 + \frac{pLg}{2} \left(x_0 - \frac{L}{4} \right) - \sum_{i=1}^n (x_0 - x_i) F_i = 0$$

$$\Leftrightarrow M_2 = \frac{pL^2g}{8} - \frac{pLgx_0}{8} - x_0 \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{x_i}{L} \right) F_i - \sum_{i=1}^n (x_0 - x_i) F_i$$

$$= M_1 - \sum_{i=1}^n (x_0 - x_i) F_i$$

We zien dat in het geval dat alle opwaartse krachten binnen de snede aangrijpen, er gewoon een term $-\sum_{i=1}^n (x_0 - x_i) F_i$ bij de uitdrukking voor het moment komt. We gaan nu hetzelfde doen voor $x_0 < \frac{L}{2}$.



Snede 3: $x_0 < \frac{L}{2}$, $x_i > x_0$

$$M: M_3 - V_a x_0 + \frac{px_0^2g}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow M_3 = \frac{px_0^2g}{2} + \frac{3pLg}{8} - x_0 \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{x_i}{L}\right) F_i$$

Snede 4: $x_0 < \frac{L}{2}$, $x_i < x_0$

$$M: M_4 - V_a x_0 + \frac{px_0^2g}{2} - \sum_{i=1}^n (x_0 - x_i) F_i = 0$$

$$\Leftrightarrow M_4 = M_3 - \sum_{i=1}^n (x_0 - x_i) F_i$$

We kunnen hetzelfde besluiten als voor het geval $x_0 > \frac{L}{2}$. Deze formules kunnen worden veralgemeend tot twee formules, met een extra voorwaarde voor de bijkomende termen die ervoor zorgt dat krachten die buiten de snedes vallen niet in rekening worden gebracht.

$x_0 < \frac{L}{2}$:

$$M = \frac{pL^2g}{8} - \frac{pLgx_0}{8} - x_0 \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{x_i}{L}\right) F_i - \sum_{\substack{i=1 \\ x_i < x_0}}^n (x_0 - x_i) F_i$$

$x_0 > \frac{L}{2}$:

$$M = \frac{px_0^2g}{2} + \frac{3pLg}{8} - x_0 \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{x_i}{L}\right) F_i - \sum_{\substack{i=1 \\ x_i < x_0}}^n (x_0 - x_i) F_i$$

Deze formules kunnen makkelijk worden geïmplementeerd in een algoritme.

Uit voorgaande berekeningen wordt de plaats van de steunpunten gegeven zodat het maximale buigmoment op de brug geminimaliseerd wordt. Dit is een indicatie voor de doorbuiging, maar geeft geen garantie dat de gevonden posities naast het moment ook deze doorbuiging zal minimaliseren.

Daarom is het nuttig dit algoritme uit te breiden door telkens uit het gevonden moment de doorbuiging van de plaat te berekenen.

$$\text{Doorbuiging} = \frac{\iint M(x)}{E * I}$$

Dit is natuurlijk een versimpelde versie van de uiteindelijke doorbuiging; het effect van het vakwerk onder de brug wordt niet in rekening gebracht.

In dit geval is de momentenlijn ($M(x)$) een continue, stuksgewijze functie; ze heeft telkens een ander voorschrift wanneer de looper x een van de krachten of de het midden van de brug 'voorbij' gaat, zoals volgt uit de berekeningen in het eerste deel.

Stel dat er n opwaartse krachten (steunpunten) inwerken, dan zijn er $n+2$ intervallen waarbinnen M een ander functievoorschrift heeft, er vanuit gaande dat geen van de krachten op exact de helft van de overspanning aangrijpt, wat $n+1$ intervallen zou opleveren.

De dubbele integraal uit bovenstaande formule levert per interval twee integratieconstanten, wat $2n+4$ onbekenden oplevert in het stelsel van vergelijkingen, dewelke gevonden kunnen worden met behulp van volgende randvoorwaarden:

Geen doorbuiging aan het begin en eind van de brug ⁽²⁾

Doorbuiging op de gemeenschappelijke punten van twee intervallen is gelijk ⁽ⁿ⁺¹⁾

Afgeleide van de doorbuiging op de gemeenschappelijke punten van twee intervallen is gelijk ⁽ⁿ⁺¹⁾

Verdere uitwerking van dit stelsel en de oplossingen zijn te vinden in volgend deel betreffende de programmering.

3.1.2. Uitwerking en Programmering

Om de ideale positie van de steunpunten te bepalen, wordt elke combinatie van de posities en groottes van de krachten de doorbuiging berekend, waarbij telkens de configuratie met de kleinste maximale doorbuiging bijgehouden wordt.

Het afgaan van alle combinaties geschiedt eenvoudigweg door geneste for-lussen. Elk steunpunt krijgt twee lussen: een voor de positie, de ander voor de grootte.

In deze lussen wordt telkens de momentenlijn berekend en daaruit de doorbuiging.

Door de opstelling, met name de opwaartse puntkrachten en uniforme belasting op de helft van de brug, zijn alle functievoorschriften van de momentenlijn polynomen van graad twee of minder. Deze functies zijn volledig bepaald door hun start- en eindpunt, en drie parameters (ax^2+bx+c).

Uit voorgaande berekeningen volgen a, b en c , en start- en eindpunt volgen uit de for-lus.

Deze kenmerkende variabelen worden eenvoudig opgeslagen in een eendimensionale array.

Deze array wordt vervolgens doorgegeven aan een methode die hieruit de doorbuiging zal berekenen.

Berekening van de doorbuiging

In het volgende deel wordt er vanuit gegaan dat:

$X[i]$ =positie van het i -de steunpunt, met $X[0]=0$, met een aparte index voor het midden, en de laatste index voor het einde van de brug.

$$M[i][0]=a_i$$

$$M[i][1]=b_i$$

$$M[i][2]=c_i$$

Na het tweemaal integreren van de momentenlijn, wordt een polynoom van maximaal vierde graad bekomen: $Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E$

Ook deze parameters kunnen opgeslagen worden in een array:

$$M[i][0]=A_i$$

...

$$M[i][4]=E_i$$

Het integreren wordt eenvoudig gerealiseerd door volgende code:

```
for (int i=0;i<M.length;i++)
{
    m[i][0]=M[i][0]/12;
    m[i][1]=M[i][1]/6;
    m[i][2]=M[i][2]/2;
}
```

Hierdoor zijn alle A_i, B_i en C_i bekend.

Uitschrijven van de eerder gegeven randvoorwaarden, om D_i en E_i te bepalen, levert:

$$E_0=0$$

$$A_n L^4 + B_n L^3 + C_n L^2 + D_n L + E_n = 0 \quad (\text{met } n=M.\text{length}-1; \text{ de laatste index})$$

$$A_i X[i]^4 + B_i X[i]^3 + C_i X[i]^2 + D_i X[i] + E_i = A_{i-1} X[i]^4 + B_{i-1} X[i]^3 + C_{i-1} X[i]^2 + D_{i-1} X[i] + E_{i-1}$$

$$4 * A_i X[i]^3 + 3 * B_i X[i]^2 + 2 * C_i X[i] + D_i = 4 * A_{i-1} X[i]^3 + 3 * B_{i-1} X[i]^2 + 2 * C_{i-1} X[i] + D_{i-1}$$

Bepaling $E_i=M[i][4]$

Vermenigvuldig vergelijking 3 met $X[i]$ en trek hiervan vergelijking 2 af.

Uit deze vergelijking kan E_i afgezonderd worden.

Doordat E_0 gekend is, volgt hieruit E_1 . Met de kennis van E_1 kan E_2 bepaald worden, enzovoort.

$$M[0][4]=0;$$

```
for (int i=1;i<M.length;i++)
{
```

```

M[i][4]=3*(M[i][0]-M[i-1][0])*X[i]*X[i]*X[i]*X[i]
        +2*(M[i][1]-M[i-1][1])*X[i]*X[i]*X[i]
        +(M[i][2]-M[i-1][2])*X[i]*X[i]+M[i-1][4];
}

```

Bepaling $D_i=M[i][3]$

Uit de tweede regel van vergelijking 1 volgt nu D_n , aangezien alle andere parameters gekend zijn.

Eens D_n gekend, volgt uit vergelijking 3, door $i=n-1$ te nemen, D_{n-1} .

Door dit te herhalen voor $i=n-2, \dots, i=0$ kunnen alle D_i bepaald worden.

```

M[M.length-1][3]=-M[M.length-1][4]/Global.L
-M[M.length-1][2]*Global.L
-M[M.length-1][1]*Global.L*Global.L
-M[M.length-1][0]*Global.L*Global.L*Global.L;
for (int i=M.length-2;i>=0;i--)
{
    M[i][3]=4*X[i+1]*X[i+1]*X[i+1]*(M[i+1][0]-M[i][0])
+3*X[i+1]*X[i+1]*(M[i+1][1]-M[i][1])
+2*X[i+1]*(M[i+1][2]-M[i][2])
+M[i+1][3];
}

```

Opmerking: Er is gekozen voor bijvoorbeeld $X[i]*X[i]*X[i]*X[i]$ in plaats van het compactere en overzichtelijkere $Math.pow(X[i],4)$, aangezien dit laatste minder performant, dus trager is.

Nu de volledige doorbuiging gekend is, moet enkel nog het maximum gezocht worden. Aangezien de functievoorschriften voor handen zijn, kan het maximum eenvoudig bepaald worden door deze functies te differentiëren en gelijk te stellen aan nul; men bekomt derdegraads vergelijkingen, die exact opgelost kunnen worden met de volgende formules.

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

$$Q \equiv \frac{a^2 - 3b}{9}$$

$$R \equiv \frac{2a^3 - 9ab + 27c}{54}$$

$$M \equiv R^2 - Q^3$$

$M < 0$ (3 reële wortels)

$$\theta \equiv \cos^{-1} \frac{R}{\sqrt{Q^3}}$$

$$x_1 = -\left(2\sqrt{Q} \cos \frac{\theta}{3}\right) - \frac{a}{3}$$

$$x_2 = -\left(2\sqrt{Q} \cos \frac{\theta + 2\pi}{3}\right) - \frac{a}{3}$$

$$x_3 = -\left(2\sqrt{Q} \cos \frac{\theta - 2\pi}{3}\right) - \frac{a}{3}$$

$M > 0$ (1 reële wortel)

$$S \equiv \sqrt[3]{-R + \sqrt{M}}$$

$$T \equiv \sqrt[3]{-R - \sqrt{M}}$$

$$x_1 = S + T - \frac{a}{3}$$

Daarna moet enkel nog gekeken worden of de gevonden wortel(s) binnen het interval, waarbinnen de doorbuigingsfunctie geldt, ligt.

3.2. Matrixmethode

De tweede stap in het ontwerpproces is nu het bepalen van het vakwerk dat onder het wegdek komt te liggen. Om de ideale plaats van de knooppunten te vinden werd er een programma geschreven. In deze paragraaf zal dit programma besproken worden en ook uitgelegd worden waarom het niet de oplossing kon geven die gewenst was.

Het programma werkt als volgt. De optimalisatieoefening bepaalt het aantal punten dat aan het wegdek aangehecht wordt, de plaats van die punten en de kracht die op die punten inwerkt. Er wordt een aantal knooppunten gekozen dat onder het wegdek komt te liggen en de manier waarop die punten verbonden worden. Voor die punten worden alle plaatsen afgegaan waar ze kunnen liggen en voor elke configuratie wordt het vakwerk uitgewerkt en gedimensioneerd. Dan wordt het volume bepaald van alle staven en dus het totale volume van het vakwerk. Als we dit volume minimaliseren krijgen we een optimaal vakwerk.

3.2.1. Matrixmethode in theorie

De matrixmethode is een methode die toelaat om een isostatisch vakwerk op te lossen door een matrix op te stellen en die te inverteren. Dit laat toe om een algoritme te schrijven dat zeer snel voor een bepaald vakwerk de normaalkrachten vindt. Het opstellen van die matrix gaat als volgt:

De eerste rij linkt het eerste knooppunt met de andere knooppunten via de staven (kolom 1 staat voor staaf 1, kolom 2 voor staaf 2, ...) en dit volgens de x-as. De tweede rij doet hetzelfde volgens de y-as. De twee volgende rijen zijn voor het tweede knooppunt, enz...

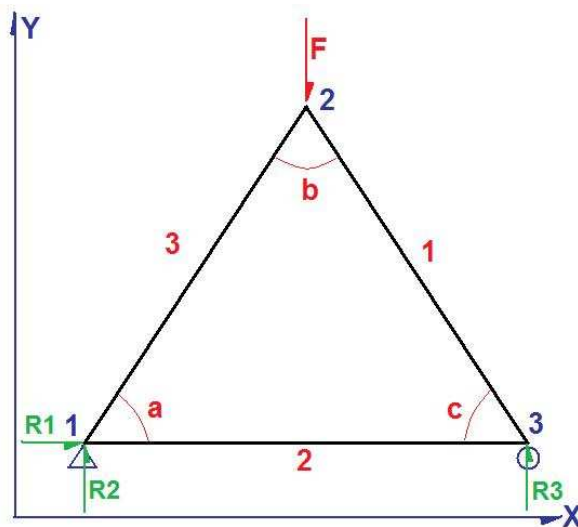
In een isostatisch vakwerk zijn er b staven, n knooppunten en a reactiekrachten. Die reactiekrachten zal men ook in x en y componenten moeten verdelen. Hierdoor is kolom b+1 voor de x component van de eerste reactie, kolom b+2 voor de y component van de eerste reactie, enz....

Elke kolom van de reactiekrachten is een nulvector, op 1 plaatsje na, namelijk op de rij waar verbinding wordt gelegd tussen de reactiekracht en het knooppunt.

Het element A_{ij} is niets anders dan de factor $\frac{x_{staaf} - x_i}{L}$ of $\frac{y_{staaf} - y_i}{L}$.

Bron: Opdrachttekst voor het project bouwkunde van 2007

Als men dit toepast op het eenvoudige voorbeeld van een enkele, gelijkbenige driehoek krijgen we dit:



Het vakwerk is een vlak vakwerk met drie knooppunten. De matrix zal dus een 6 bij 6 matrix zijn. Kolom 1 geeft de informatie over de eerste staaf. De staaf gaat van punt 2 naar punt 3. In de rijen die overeenkomen met punt 1 staat dus een 0. In de rijen die overeen komen met punt 2 en drie staat telkens de richting van de staaf in dat punt. Voor punt 3 is de x-richting $-\cos c$ en de y-richting $\sin c$. Dit doet men voor de drie staven. In de laatste drie kolommen moet de richting van de reactiekrachten komen in het punt waar ze aangrijpen: de eerste reactiekracht ligt volgens de x-as in het punt 1, de x-richting is dus 1, de y-richting is 0. Dit doet men voor de drie reactiekrachten. De totale matrix ziet er dus als volgt uit:

$$\begin{array}{l}
 1x \\
 1y \\
 2x \\
 2y \\
 3x \\
 3y
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 S1 & S2 & S3 & R1 & R2 & R3 \\
 0 & 1 & \cos a & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \sin a & 0 & 1 & 0 \\
 \sin b/2 & 0 & -\sin b/2 & 0 & 0 & 0 \\
 -\cos b/2 & 0 & -\cos b/2 & 0 & 0 & 0 \\
 -\cos c & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \sin c & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{bmatrix}$$

Als nu de normaalkrachten gevonden willen worden moet het volgend stelsel uitgewerkt worden:

$$A * F + P = 0$$

Met A de matrix die het vakwerk beschrijft, F de kolomvector met de normaalkrachten en reactiekrachten en P de kolomvector met de belasting. Voor het voorbeeld wordt dit stelsel dus:

$$\begin{bmatrix}
 0 & 1 & \cos a & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \sin a & 0 & 1 & 0 \\
 \sin b/2 & 0 & -\sin b/2 & 0 & 0 & 0 \\
 -\cos b/2 & 0 & -\cos b/2 & 0 & 0 & 0 \\
 -\cos c & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \sin c & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{bmatrix}
 * \begin{bmatrix}
 S1 \\
 S2 \\
 S3 \\
 R1 \\
 R2 \\
 R3
 \end{bmatrix}
 = \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 -F \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}$$

Uitwerken geeft de normaalkrachten in de staven en de reactiekrachten.

3.2.2. Programmeren van de matrixmethode

Voor het programmeren van de matrixmethode is het JAMA package, voor matrixbewerkingen, gebruikt (<http://math.nist.gov/janumerics/jama/>).

Stap 1: Verbindingen

Om een isostatisch vakwerk te hebben moet het aantal verbindingen gelijk zijn aan $2*n-3$ met n het aantal knopen

Voor de verbindingen wordt een array van 2 breed gebruikt en $2*n-3$ lang. De eerste kolom bevat het beginpunt en de tweede kolom het eindpunt.

Voor het voorbeeld van de driehoek zou de verbindingsarray er als volgt uitzien:

1	2
2	3
3	1

Stap 2: Reactiekrachten

Omdat het een vlak vakwerk is, is het aantal reactiekrachten gelijk aan 3. De reactiekrachten worden bijgehouden in een 3 bij 3 array. In de eerste kolom komt het punt waar de reactiekracht aangrijpt, in de tweede kolom de richting. Als de reactiekracht in de x-richting ligt staat er een 0, als de reactiekracht in de y-richting ligt staat er een 1. In de laatste kolom staat telkens een 1, omdat dit het getal is dat ingevuld moet worden in de matrix.

Voor het voorbeeld zou de reactiekrachtenarray er als volgt uitzien:

1	0	1
1	1	1
3	1	1

Stap 3: Belasting

De belastingen worden bijgehouden in een kolommatrix met als lengte tweemaal het aantal punten van het vakwerk. Voor elk punt zijn er twee plaatsen voorzien in de kolommatrix, een voor de x-richting van de aangrijpende reactiekracht en een voor de y-richting van de reactiekracht. Als het nummer van het punt gelijk is aan n dan staat de x-richting van de reactiekracht die aangrijpt in punt n op plaats $2*n$ en de y-richting op plaats $2*n+1$.

Voor het voorbeeld zou de belastingsmatrix er als volgt uitzien:

$1x$	[0
$1y$		0
$2x$		0
$2y$		$-F$
$3x$		0
$3y$		0

Stap 4: Plaats

De plaats van de punten wordt ingevuld in een array van 2 breed, de eerste kolom is voor de X positie, de tweede kolom is voor de Y positie.

Stap 5: Lengte

Om de lengte van de verbindingen maar een keer te moeten berekenen worden deze ook bijgehouden. Hiervoor wordt er een array gebruikt van $2 \times n-3$ bij $2 \times n-3$ die lengtematrix genoemd wordt. Als er een verbinding loopt van punt 1 naar punt 3 wordt de lengte bijgehouden op plaats (0,2) en op plaats (2,0).

Voor het voorbeeld zou de lengtematrix er als volgt uitzien:

$$\begin{array}{ccc} 0 & L3 & L2 \\ L3 & 0 & L1 \\ L2 & L1 & 0 \end{array}$$

Met L1, L2 en L3 de lengte van staaf 1 2 en 3.

Stap 6: Vakwerkmatrix

Als alle vorige gegevens beschikbaar zijn kan men de vakwerkmatrix opstellen. Voor kolom 1 tot kolom $2 \times n-3$ (met n het aantal knooppunten) wordt de verbindingenarray af gegaan en vullen alle verbindingen in. Bijvoorbeeld als verbinding 1 van punt 1 naar punt 3 komt in de eerste kolom op de eerste plaats $\frac{x3-x1}{lengte}$, op de tweede plaats $\frac{y3-y1}{lengte}$, op de 5^{de} plaats $\frac{x1-x3}{lengte}$ en op de 6^{de} plaats $\frac{y1-y3}{lengte}$.

Voor de laatste drie kolommen kijkt men naar de reactiekrachten en plaatst men de 1 op de correcte plaats.

Stap 7: Oplossen van het vakwerk

Nu de vergelijking opgesteld is kan ze opgelost worden. Dit gebeurt met de functie solve uit JAMA dat een stelsel van de vorm $A \cdot X = B$ oplost. Het geeft een kolommatrix terug met daarin de staafkrachten.

`Normaalkrachten = Vakwerkmatrix.solve(Belasting.Belastingsmatrix.times(-1));`

Stap 8: Bepalen van het volume

Nu de staafkrachten gekend zijn, kan het vakwerk gedimensioneerd worden. Door de eerste $2 \times n-3$ termen van de kolomvector met normaalkrachten af te gaan, de doorsnede van de vereiste staven in trek of druk te bepalen en dat te vermenigvuldigen met de lengte van de verbinding kennen we het volume.

Voor staven in trek is het volume gewoon gelijk aan $\frac{kracht \cdot lengte}{treksterkte}$

Voor staven in druk wordt eerst gedimensioneerd op de druksterkte: $doorsnede = \frac{kracht}{druksterkte}$. Aan de hand van de doorsnede wordt de kritische kracht bepaald waarbij de staaf gaat uitknikken (er wordt verondersteld dat de staat een vierkante doorsnede heeft) $P_{krit} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot doorsnede}{12 \cdot Lengte^2}$

Als de kritische kracht kleiner is dan de kracht op de staaf wordt het volume gelijk gesteld aan

$lengte^2 * \sqrt{\frac{6}{\pi^2 \cdot E}}$ anders wordt het volume gewoon $doorsnede * lengte$.

Stap 9: Afgaan van alle mogelijkheden

Als nu Stap 4 in lussen gezet wordt kunnen alle mogelijkheden af gegaan worden, en door stappen 5 tot 8 elke keer te herhalen kan het volume geminimaliseerd worden. Voor twee punten te laten variëren geeft dit:

```
for (x5=0;x5<Global.length-steppositionx;x5+=steppositionx){
    for (x6=x5+steppositionx;x6<Global.length;x6+=steppositionx){
        for (double y5=steppositiony;y5<Global.height;y5+=steppositiony){
            for (double y6=steppositiony;y6<Global.height;y6+=steppositiony){
                // plaats de twee punten

                Plaats.geefplaats(5, x5, y5);

                Plaats.geefplaats(6, x6, y6);

                // bereken de lengte van de verbindingen

                Verbinding.lengteberekening();

                // stel de vakwerkmatrix op

                Matrixmethode.Creatematrix();

                // los het stelsel op

                Matrixmethode.Solve();

                // bereken het volume

                volume=Volumebepaling.Volume();

                // Als het volume kleiner is dan het minimumvolume tot nu toe

                // worden de plaatsen van de punten opgeslaan.

                if (prevvolume>volume){

                    prevvolume=volume;

                    for (int i=0;i<Plaats.plaatsarray.length;i++){

                        optimaleplaats[i]=Plaats.plaatsarray[i].clone();

                    }

                }

            }

        }

    }

}
```

3.2.3. Problemen met de matrixmethode

Het programma dat gebruik maakt van de matrixmethode is een zeer efficiënt instrument om het volume van een vakwerk te optimaliseren, maar omdat de methode geen rekening houdt met de doorbuiging is het niet voldoende om het gewoon te laten lopen over alle mogelijkheden. Het gaat de punten altijd zo dicht mogelijk bij het wegdek plaatsen terwijl, om de doorbuiging te beperken, de knooppunten toch een bepaalde afstand van het wegdek moeten hebben. Als de minimumafstand voor die punten bepaald zou kunnen worden, zou het programma wel nog efficiënt de punten kunnen plaatsen en bovendien kan het gebruikt worden om aan een bestaand vakwerk nog punten toe te voegen op een optimale plaats.

De grootste verbetering die toegevoegd kan worden aan het programma is natuurlijk een methode om de doorbuiging te bepalen. Dit zou kunnen door gebruik te maken van een eindige elementenmethode.

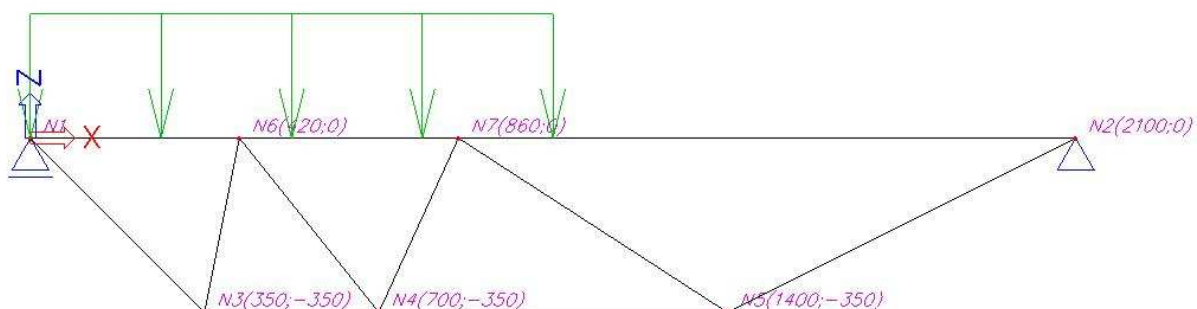
3.3. SCIA

Omdat de resultaten uit de matrixmethode niet bruikbaar waren heeft men terug gevallen op twee basisontwerpen en zijn die ontwerpen met SCIA handmatig geoptimaliseerd.

3.3.1. Ontwerp Maxime

Nadat er een vakwerk is uitgedacht met behulp van de optimalisatieoefening in Matlab en de matrixmethodes, tekent men dit ontwerp in SCIA. SCIA kan allerlei zaken in rekening brengen die tot op dit moment nog niet in rekening gebracht zijn. Bovendien kan SCIA de doorbuiging weergeven en alle normaalkrachten in elke staaf. Indien men verschillende ontwerpen tekent, kan men deze goed vergelijken en de beste eruit kiezen. Ook is het zeer handig om dan met alle krachten bij de respectievelijke staven hun ideale doorsnede uit te rekenen.

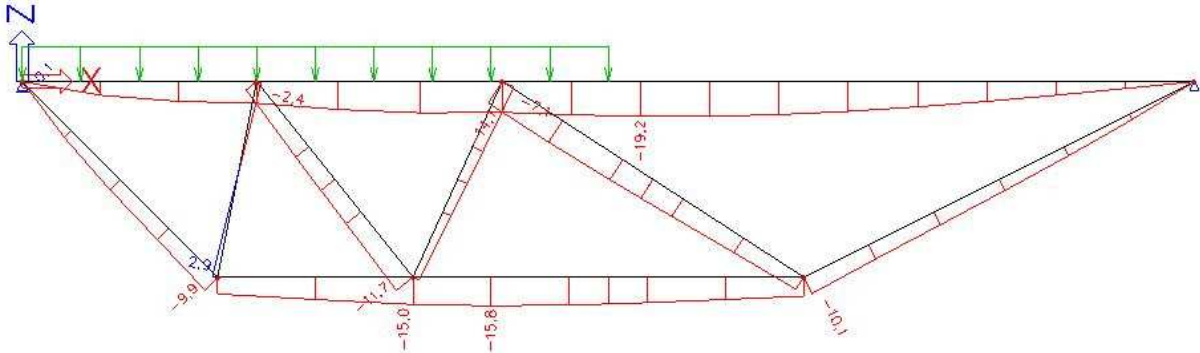
Hieronder wordt het ontwerp van de brug, waarvan men hier de eigenschappen bespreekt, getoond. Er worden slechts 2 steunpunten gebruikt. Vermits de opdracht onder andere inhoudt dat het gewicht moet geminimaliseerd worden, is het de moeite waard om een ontwerp met slechts 2 steunpunten uit te proberen. De steunpunten worden op het wegdek vastgemaakt op 420mm en 860mm van de rolplegging. Onderaan het vakwerk komen er op drie plaatsen staven scharnierend samen. Deze drie knooppunten liggen 350mm onder het wegdek, respectievelijk op 350mm, 700mm en 1400mm van de rol in horizontale richting.



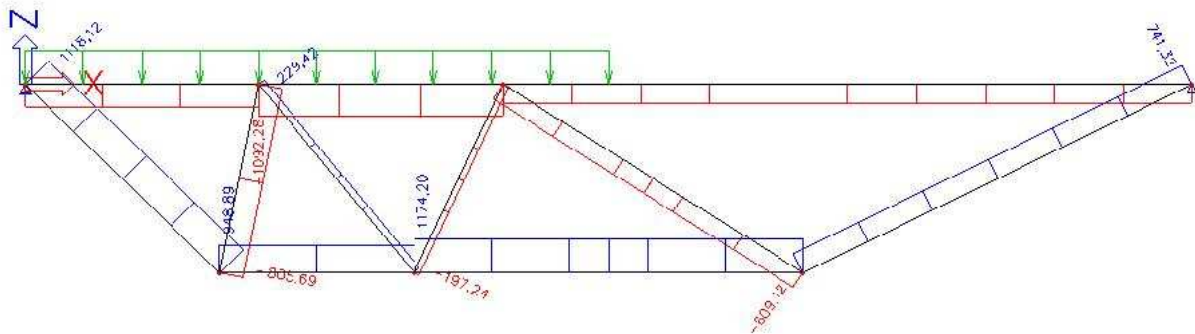
figuur: beschrijving van het ontwerp

3.3.1.1. DE RESULTATEN

Er zijn twee belangrijke zaken waarin men geïnteresseerd is. Ten eerste wil men de normaalkrachten in elke staaf en in het wegdek kennen om deze zo te dimensioneren dat de staven en verbindingen niet falen in sterkte of knik. Ten tweede kan SCIA de totale doorbuiging berekenen van het wegdek.



figuur: doorbuiging wegdek maximaal 19,2 mm.

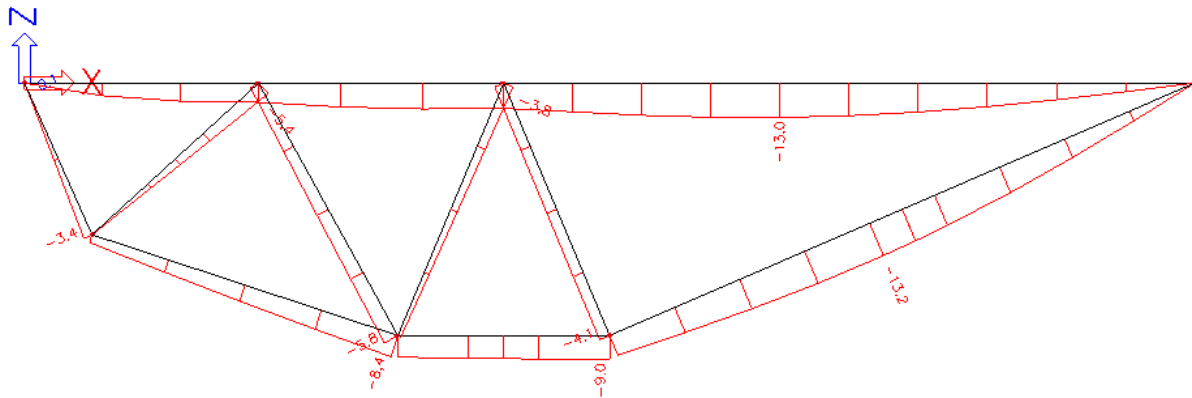


3.3.2. Ontwerp Hannes

Omdat de resultaten uit de matrixmethode niet bruikbaar waren vanwege het niet in rekening brengen van de doorbuiging werd er teruggevallen op het systematisch afgaan van mogelijke vakwerken in het bijgeleverde programma Scia Engineer 2008.

Om het materiaal minimaal te houden werd er vertrokken van zo weinig mogelijk steunpunten aan het wegdek. Pas wanneer merkbaar zou zijn dat dit niet zou kunnen voldoen aan de eisen zou er naar drie of meer steunpunten worden overgeschakeld.

Het eerste voorstel uit de optimalisatieoefening bestond uit twee steunpunten op respectievelijk 42 en 86 cm. Voor de vorm van het vakwerk werd gekozen om de momentenlijn van de belasting te volgen, op deze manier werd het verkregen moment op het wegdek systematisch tegengewerkt.

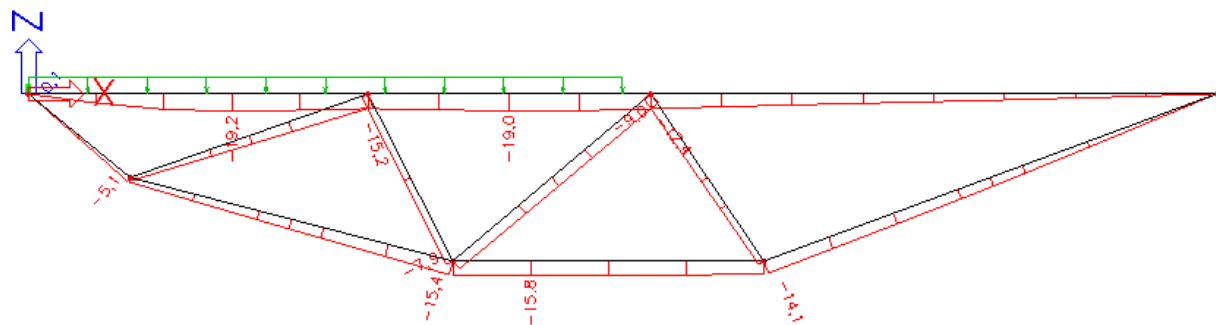


Dit was slechts het eerste voorstel, dit vakwerk had verschillende nadelen die onmiddellijk konden worden weggewerkt:

- de doorbuiging ligt ver onder de toegelaten 21 mm en de onderste knooppunten die op 45 cm diepte lagen konden dus veel naar boven geplaatst worden.

-De maximale doorbuiging vindt plaats op het deel van het wegdek waar geen belasting is, het was dus verstandiger om de steunpunten naar rechts te verplaatsen.

Na het systematisch verplaatsen van de knopen en steunpunten werd dan het volgend vakwerk gecreëerd:



Dit vakwerk gaf een optimale doorbuiging. De knooppunten lagen op een diepte van 30 cm wat zorgde voor een lage hoeveelheid aan materiaal.

3.3.3. Keuze van ontwerp

Wanneer deze twee ontwerpen met elkaar vergeleken worden dan ziet men niet onmiddellijk welke de laagste massa heeft. Hiervoor kon wel de eerder besproken matrixmethode gebruikt worden.

Wanneer de twee ontwerpen in de matrixmethode werden geïmplementeerd dan zag men dat het ontwerp van Hannes na dimensionering op basis van de normaalkrachten een lager volume en dus massa had. Zoals men hierboven kan zien zorgde dit ontwerp ook voor een lagere doorbuiging van het wegdek. Daarom werd gekozen voor Hannes' ontwerp. Er werd niet meer verder gezocht naar vakwerken met een hoger aantal steunpunten omdat dit enkel tot een hogere massa zou leiden en omdat er met twee steunpunten toch al aan de voorwaarden voldaan was.

4. Uitvoering en bouw van het ontwerp

Nadat er werd gekozen voor deze vorm van vakwerk moesten alle staven en verbindingen gedimensioneerd worden. Hiervoor werd gebruik gemaakt van de eerder vermelde formules en waarden. Na de dimensionering moest dit ontwerp ook gebouwd worden en omdat er enkel gebruik werd gemaakt van boutverbindingen en niet van plaatjes was het maken van een plan dat zorgde dat alle staven paste ook nog een aparte moeilijkheid. Eens dat de brug volledig in elkaar stak werd hij onderworpen aan een eerste test en daar was te merken dat er extra complicaties optraden. Al deze complicaties worden in dit hoofdstuk besproken.

4.1. Eerste model

4.1.1. Dimensioneren van de brug (versie 1)

4.1.1.1. Trek

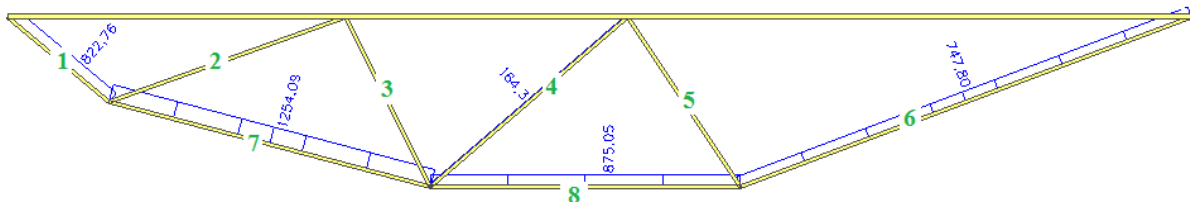
Voor het dimensioneren van de staven in trek op basis van de hierboven getoonde normaalkrachten moest er enkel rekening gehouden worden met de volgende formule:

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A_{\min}} = 28 \text{ MPa} \leftrightarrow A_{\min} = \frac{F}{28e6 \text{ Pa}}$$

Om een veiligheidsfactor van twee te bewaren werd de normaalkracht in de staaf verdubbeld. Omdat de breedte al vast lag op 6 mm en er altijd werd uitgegaan van een rechthoekige dwarsdoorsnede kon dus enkel de hoogte gekozen worden.

$$b * h = A = 2A_{\min} = 2 \frac{F}{28e6} \leftrightarrow h = 2 \frac{F}{6 * 28e6} \text{ mm}$$

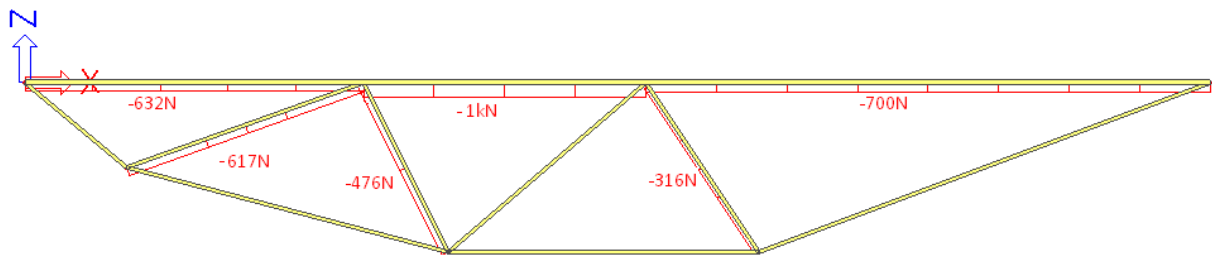
De staafkrachten worden uit de berekeningen van SCIA gehaald:



#	kracht [N]		kracht [N]	A [mm ²]	hoogte [mm]	Afronding [mm]
		Veiligheidsfactor 2		=kracht/ σ_{max}	= A/6	
1	823		1646	58,78571429	9,797619048	10
4	165		330	11,78571429	1,964285714	5
6	748		1496	53,42857143	8,904761905	9
7	1255		2510	89,64285714	14,94047619	15
8	876		1752	62,57142857	10,42857143	11

4.1.1.2. Druk

Bij het ontwerpen van een vakwerk, wordt voor het uiteindelijke ontwerp de normaalkracht in elke staaf berekend. In dit onderdeel wordt er uitgewijd over de eigenlijke dimensionering van de gebruikte drukstaven in ontwerp 1 en ontwerp 2, het finale ontwerp. Dit gebeurt aan de hand van de voorgedimensioneerde staven die reeds werden besproken bij de materiaalbespreking, naar deze staven met hun specifieke afmetingen zal verder in dit onderdeel ook gerefereerd worden. Er dient namelijk enkel de berekende normaalkracht, maal veiligheidsfactor 2, in te worden gevuld en nagegaan of de gegeven lengte, in het ontwerp, binnen de maximum berekende lengte valt. Bovendien wordt het wegdek nagegaan op knik, tevens aan de hand van zijn normaalkrachten.



Drukstaven:

Het eerste ontwerp bevat drie drukstaven:

	Gegeven lengte (cm)	Berekende normaalkracht (N)	P_{krit} (N)	Vorm staaf	Maximum lengte (cm)
Drukstaaf 1	44,6	617	1234	Holle balk	64,9
Drukstaaf 2	33,5	476	952	Balk	37,8
Drukstaaf 3	36,1	316	632	Balk	46,4

Wegdek:

Het wegdek wordt door de aanhechtingpunten verdeeld in drie stukken, welke nagegaan worden op knik. Dit gebeurt door 2 maal de gegeven normaalkracht in elk stuk in te vullen in volgende formule:

$$L = \pi \sqrt{\frac{C}{0,9 P_{krit}} \frac{EI}{}}$$

$$E = 5,5 \text{ GPa}$$

$$b = 25 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$h = 9 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$I = \frac{bh^3}{12} = 1,52 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$$

$$C = 4 \text{ (beschouw als inklemming)}$$

	Gegeven lengte (cm)	Berekende normaalkracht (N)	P_{krit} (N)	Maximum lengte (cm)	Voldoet?
Stuk 1	60	632	1264	170	Ja
Stuk 2	50	1000	2000	135	Ja
Stuk 3	100	700	1400	161	Ja

4.1.2. Knooppunten

Om de verbindingen na te gaan werd gebruik gemaakt van de formules die werden besproken in paragraaf 2.2.2. Dit gaf de volgende vereisten:

staaf	kracht(N)	W(m)	e(m)
1	823	0,029	0,017
4	165	0,011	0,010
6	748	0,027	0,016
7	1255	0,041	0,026
8	876	0,030	0,018

De in de tabel vermelde kracht is het dubbele van de normaalkracht in de staaf. De veiligheidsfactor 2 is op deze manier in rekening gebracht. Op basis hiervan werden dan de excentriciteiten bepaald. Wanneer deze te klein waren, de bouten hadden zelf een doorsnede van 6 mm, dan werden er enkele millimeters toegevoegd, de toegevoegde massa die hiermee gepaard ging was meestal verwaarloosbaar.

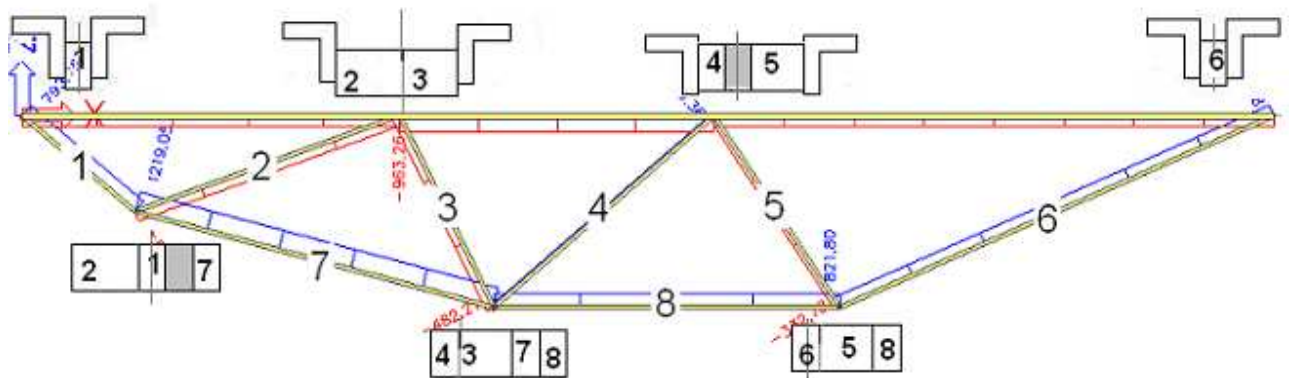
4.1.3. Het in elkaar zetten van de puzzel (versie 1)

De bouw van de brug was het laatste onderdeel van het project. Hoewel dit op het eerste zicht het gemakkelijkste deel van het project is, alles is namelijk al berekend, uiten vele onverwachte problemen zich in dit onderdeel: staven hebben een verkeerde lengte waardoor ze niet in hun

knooppunt passen, ze zijn fout berekend zodat ze het bij het testen begeven, enz. Bij de bouw dringen er zich kortweg problemen voor die in het theoretisch deel niet voorkomen.

Het eerste wat bij de bouw gedaan werd, was het tekenen van de posities van de verbindingstukken met het wegdek. Hierbij werd al een eerste probleem vastgesteld, hoewel de overbrugging 2,10 m is, kan het vakwerk maar een overspanning hebben van 1,99 m. Omdat de rolopleggingen 2,10 m uit elkaar stonden en door de manier waarop de brug hierop steunt kon er pas 5,5 cm meer naar het midden gebouwd worden. Hiermee was geen rekening gehouden bij het dimensioneren van de staven, dus moesten de lengtes aangepast worden. Men heeft ervoor gekozen om enkel de laatste staaf aan te passen en de anderen de originele lengtes te laten behouden.

Nadat de positie in de lengte van het wegdek getekend was, werd de positie in de breedte van het wegdek bepaald. Er werd besloten om als knooppunten gewoon alle staven die in een knooppunt toekomen op één bout te bevestigen. Bij deze manier van verbinden wordt het minste materiaal gebruikt, wat resulteert in een lager gewicht. Het probleem hierbij is dat de staven niet allemaal op één lijn liggen en er dus parasitaire momenten kunnen optreden. Deze werden verminderd door de staven te verbinden zodanig dat er geen enkele staaf diagonaal, uit het verticaal vlak ten opzichte van het wegdek, stond. Hierdoor moesten ook de L-profielen die zorgden voor de verbinding met het wegdek verschoven worden. Pas bij de testen is gebleken dat er ook rekening moest gehouden worden met scheeftrekken van de bout onder invloed van de krachten die er op inwerken en zo een moment creëren. Omwille hiervan werd er altijd naar gestreefd om de staven met de grootste normaalkracht het dichtst bij het midden van de bout te plaatsen omdat deze anders voor grote momenten in de bouten zouden zorgen waardoor deze scheef zouden trekken. Helaas kon hier niet altijd aan voldaan worden. De verbindingen zagen er als volgt uit:



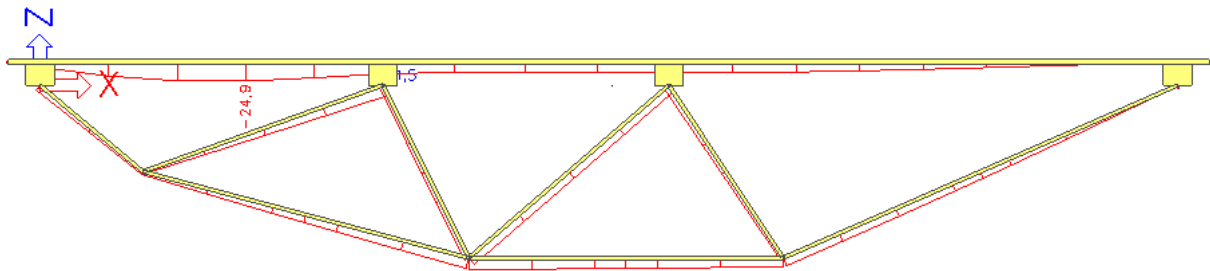
Op deze tekening staan de knooppunten getekend zoals men ze in de lengterichting ziet, de rechthoeken stellen de staven voor, de smalle zijn trekstaven en de bredere zijn drukstaven. De donkergrijze rechthoeken zijn gewoon stukjes hout van 6 mm dik die tussen de staven werden geplaatst zodat deze niet scheef zouden staan.

Toen alle posities van de verbindingstukken bekend waren, zijn ze op het wegdek bevestigd, maar bij het bouwen van het vakwerk is gebleken dat er één 1 cm verkeerd stond. Omdat de gaten 8 mm zijn, stond het nieuwe gat te dicht bij het oude en zijn er in het verbindingstuk (=L-profiel) 2 andere gaten geboord en is het met deze gaten aan de brug verbonden.

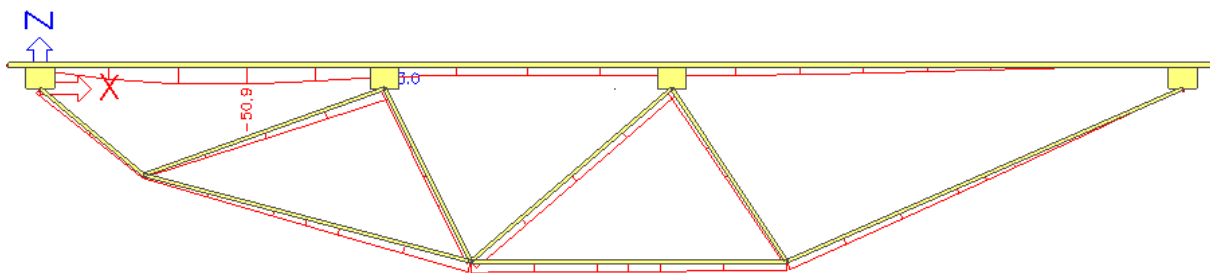
4.1.4. Problemen van het eerste model

Bij het testen van dit eerste ontwerp stootte men op een groot probleem: de brug en het vakwerk vervormden totaal niet zoals Scia Engineer het had gesimuleerd. De oorzaak hiervan was dat de L-profielen waarmee het vakwerk aan het wegdek werd gemonteerd in de simulaties in Scia Engineer niet in rekening waren gebracht. Er was verondersteld dat het vakwerk werd gemonteerd op de hoogte van het wegdek zonder tussenliggende afstand door de L – profielen. Een ander probleem dat over het hoofd was gezien, was de plaatsing van de buitenste scharnierpunten. Eerst was ervan uitgegaan dat het vakwerk 2.1 meter moest overspannen en ook werd gemonteerd op de uiteinden van het wegdek. Voor de werkelijke test daarentegen moest er aan elke zijde 5.5 cm afstand van de uiteindes van het wegdek worden bewaard waardoor het vakwerk nog maar 1.99 meter overspande.

Na het in acht nemen van deze onvoorziene factoren kwam men dan tot het volgende resultaat bij een belasting van 450 N/m:



Zoals men ziet is er bij deze belasting al een te grote doorbuiging. Dit resultaat was niet waar te nemen zonder het in rekening brengen van de plaatjes en de L-profielen. Wanneer deze simulatie werd gedaan met een belasting van 950 N/m dan werd zelfs het volgende fatale resultaat bereikt:

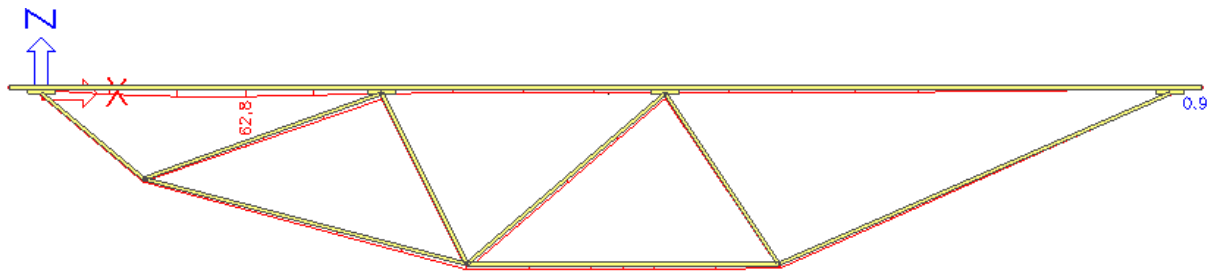


In dit geval ziet men een doorbuiging van 50.9 mm wat overeenkomt met het breken van het wegdek. Dit ontwerp was dus niet meer aanvaardbaar en er moest naar een alternatief gezocht worden.

4.2. Tweede model

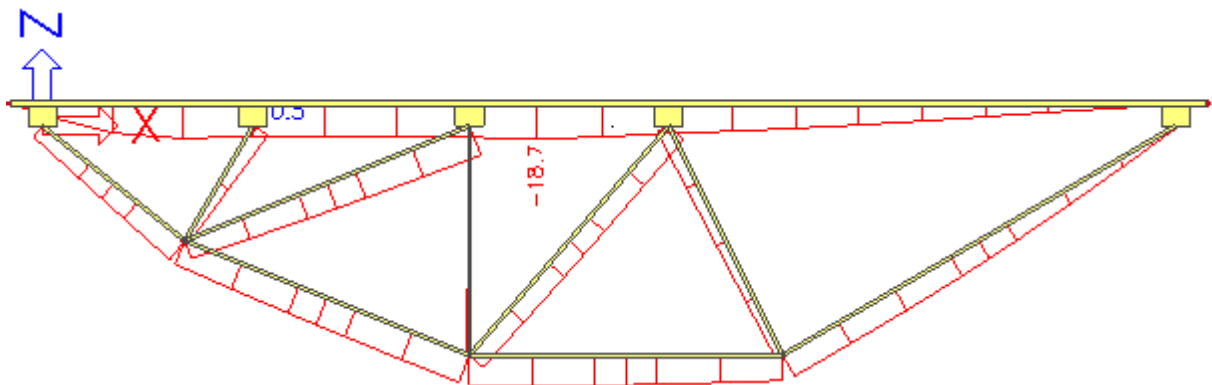
4.2.1. Ontwerp

Het eerste dat werd geprobeerd was het hoger plaatsen van de gaten in de L-profielen zodat het vakwerk dichter tegen het wegdek zou liggen. Wanneer deze op 1 cm in plaats van 4cm diepte werden geplaatst dan kwam men tot het volgende resultaat:



De maximale doorbuiging van het wegdek stijgt hier zelfs tot 62.8 mm wat duidelijk geen verbetering was. Het hoger plaatsen van de gaten in de L – profielen leidde dus niet tot een oplossing van het probleem. Er moest naar een ander alternatief gezocht worden.

Omdat de doorbuiging op die specifieke plaats veel groter was dan op de andere delen van het wegdek werd er besloten om een steunpunt toe te voegen. In eerste instantie werd er uitgegaan van een vakwerk met een diepte van 40 cm wat veel dieper was dan de eerder ontworpen vakwerken:

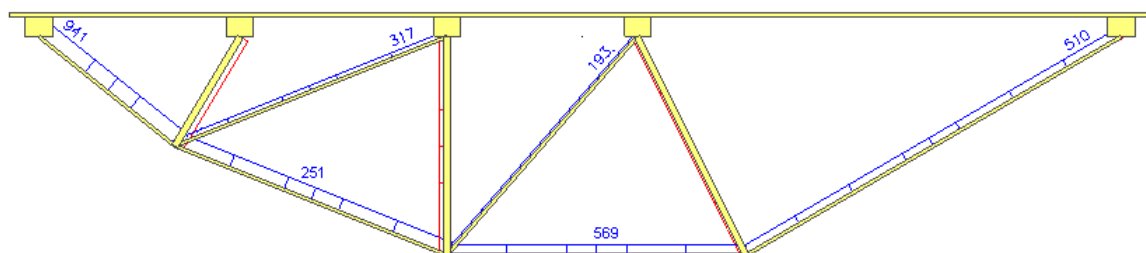


De doorbuiging lag in dit geval al zeer dicht bij het maximum van 21 mm. Wanneer het vakwerk kleiner werd, met andere woorden wanneer de knooppunten naar boven werden gebracht, ging men vrijwel onmiddellijk over deze 21 mm. Om die reden werd dit vakwerk gekozen als tweede en hopelijk definitieve model. De dimensionering die nu volgt gebeurde volledig analoog aan de eerder vermelde dimensionering en wordt daarom niet verder toegelicht.

4.2.2. Dimensioneren van de brug (versie 2)

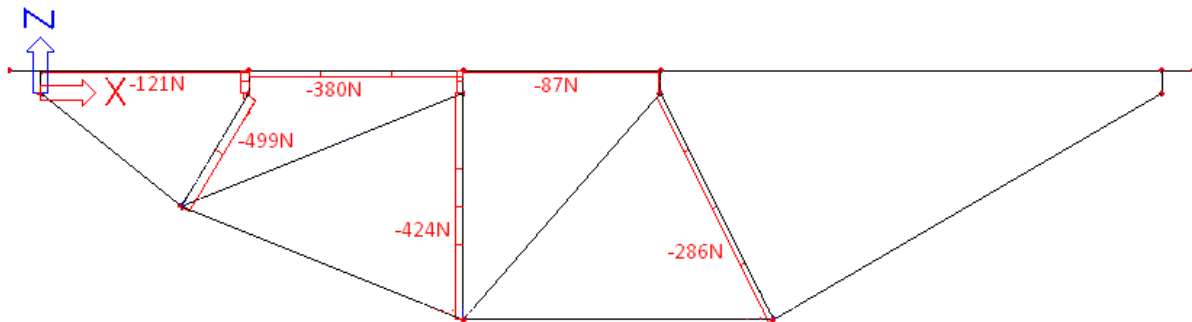
4.2.2.1. Trek

SCIA levert de staafkrachten voor een belasting van 950 N/m. Opnieuw worden alle staven op trek gedimensioneerd.



#	kracht [N]		kracht [N]	A [mm ²]	Breedte [mm]	Afronding [mm]
		Veiligheidsfactor 2		=kracht/ σ_{max}	= A/6	
1	942		1884	67,28571429	11,21428571	12
3	318		636	22,71428571	3,785714286	5
5	194		388	13,85714286	2,30952381	5
7	511		1022	36,5	6,083333333	7
8	251		502	17,92857143	2,988095238	5
9	569		1138	40,64285714	6,773809524	7

4.2.2.2. Druk



Drukstaven:

Het tweede ontwerp bevat eveneens 3 drukstaven:

	Gegeven lengte (cm)	Berekende normaalkracht (N)	P_{krit} (N)	Vorm staaf	Maximum lengte (cm)
Drukstaaf 1	23,3	499	998	Balk	37
Drukstaaf 2	40	424	848	Balk	40,1
Drukstaaf 3	44,7	286	572	Balk	48,8

Wegdek:

Het wegdek wordt door de aanhechtingpunten verdeeld in vier stukken, waarvan de eerste drie op druk staan. Hiervoor wordt de knik nagegaan:

	Gegeven lengte (cm)	Berekende normaalkracht (N)	P_{krit} (N)	Maximum lengte (cm)	Voldoet?
Stuk 1	37	121	242	389	Ja
Stuk 2	38	380	760	220	Ja
Stuk 3	35	87	174	459	Ja

4.2.2.3. Knooppunten

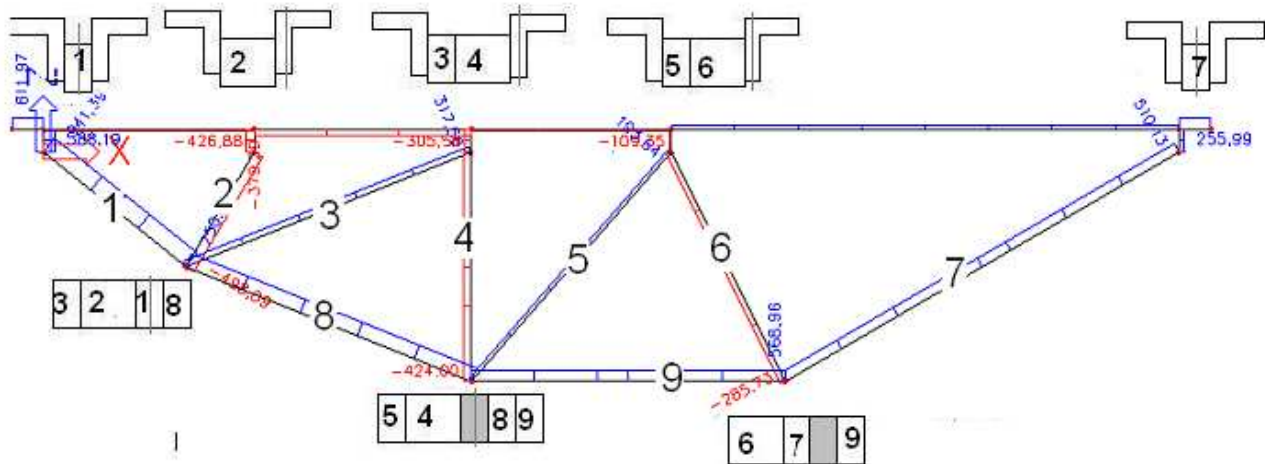
Net zoals bij het eerste ontwerp werden de verbredingen voor de verbindingen in trek berekend.

staaf	kracht(N)	W(m)	e(m)
1	942	0,032	0,020
3	318	0,015	0,010
5	194	0,011	0,010
7	511	0,020	0,011
8	251	0,013	0,010
9	569	0,022	0,012

4.2.3. Het in elkaar zetten van de puzzel (versie 2)

Bij de bouw van deze nieuwe brug is er voor gezorgd dat de problemen die bij de vorige bouw optraden, zich niet meer voordeden. Zo is er al van in het begin rekening gehouden dat het vakwerk maar een overspanning van 1,99 m heeft, en zijn de verbindingstukken met het wegdek pas vastgemaakt als het vakwerk er al in stond. Bij het bepalen van de posities van de staven en verbindingstukken is nauwgelet rekening gehouden met het scheeftrekken van de bouten en zijn de staven zo geplaatst dat de krachten elkaar zo veel mogelijk opheffen en dat de grootste krachten in het midden van de bout liggen zodat ze een kleiner moment creëren. Er werd begonnen met de twee uiterste staven, omdat deze in het midden van het wegdek moesten komen, daarna werden de knooppunten die niet op het wegdek bevestigd moesten worden, geplaatst en als laatste deze die op het wegdek geplaatst moesten worden, omdat deze gemakkelijk naar links of rechts kunnen verschoven worden.

Uiteindelijk is dan gebleken dat de staven op volgende manier bevestigd moesten worden:



De volgorde van de staven is zo gekozen dat de krachten elkaar zoveel mogelijk opheffen, in het knooppunt 3218 ziet men bijvoorbeeld dat staaf 1 en staaf 8 naast elkaar zitten zodat de krachten elkaar opheffen. Moesten ze elk aan een uiteinde van de bout zitten zou dit een groot moment en dus scheef trekking van de bout veroorzaken.

De lichtgrijze verticale lijn duidt het midden van het wegdek aan, het valt direct op dat deze middellijn door geen enkele staaf loopt die met het wegdek verbonden is, dit komt omdat hiermee geen rekening is gehouden vermits het uitknikken van het volledige vakwerken in zijdelingse richting belemmerd wordt door de proefopstelling.

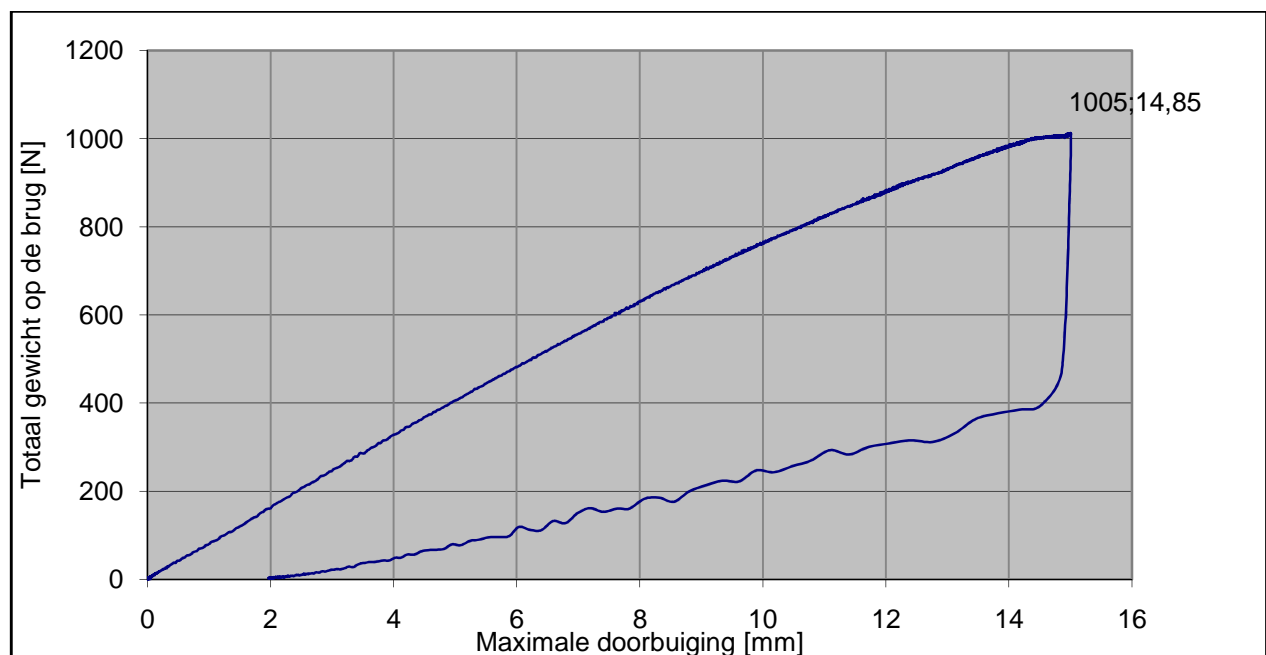
Nadat bekend was hoe de staven moesten verbonden worden, is dit ook effectief gedaan en zijn ze aan de verbindingstukken vastgemaakt, deze waren nog niet aan het wegdek verbonden en konden dus nog bewegen, maar als men ze alle drie op het wegdek plaatste, waren er geen vrijheidsgraden meer en was het vakwerk isostatisch. Op deze plaatsen zijn dan markeringen aangebracht en daarna gaten in het wegdek geboord. De verbindingstukken zijn op het wegdek bevestigd, het vakwerk in de verbindingstukken geplaatst en de brug was af.

5. Resultaten

5.1. Praktische resultaten

Op de laatste dag van het werkcollege werd de brug getest om na te gaan of de gestelde voorwaarden wel voldaan waren. Dit werd gedaan door boven de brug een stalen balk te leggen en tussen het wegdek en de stalen balk een luchtkussen op te blazen. Het luchtkussen werd opgeblazen tot een kracht van 950 N/m. De maximale doorbuiging werd gemeten met een extensiometer.

Als de kracht wordt uitgezet ten opzichte van de doorbuiging bekomt men de volgende grafiek voor de brug:



Een verdeelde belasting van 950 N/m over 1,05 m komt overeen met een gewicht van 997N. Bij een belasting van 1000N had de brug een maximale doorbuiging van 15mm. Dit viel dus ruim binnen de voorschriften. Men zou kunnen zeggen dat de brug overgedimensioneerd is, maar SCIA voorspelde een doorbuiging van 18,7mm en doordat er gekozen werd voor verbindingen met een enkele bout was het zeer onvoorspelbaar hoe groot de doorbuiging juist ging zijn. Er werd dus voor het zekere boven het onzekere gekozen en de brug werd licht overgedimensioneerd. Het stuk van de grafiek waar de lijn gekromd loopt is het stuk waar het luchtkussen ontspannen werd, het heeft geen relevantie.

Bij 1000N belasting begon staaf 6 zeer krom te staan, dit komt omdat onze verbindingen door de kracht van de staven scheef geduwd werden. Hierdoor werd de drukstaaf doorgebogen. Als de belasting hoger zou gaan dan 1000N dan zou deze staaf eerst falen.

Het gewicht van de brug werd na de test bepaald en vast gelegd op 416g. Hiermee haalde ze de eerste plaats op de wedstrijd.

5.2. Besluit

De voornaamste conclusie van dit project is dat de manier waarop de vorm van het vakwerk tot stand is gekomen niet strookt met ons beeld van een ingenieuze en onderbouwde ontwerptechniek. Tijdens de eerste dagen hebben we geprobeerd een programma te schrijven waarmee gezocht kon worden naar een optimaal vakwerk. Dit omdat we het vanuit het project werktuigkunde gewoon waren om alle mogelijkheden af te gaan en er pas een te schrappen wanneer hier een zeer gegronde reden voor was. De bedoeling van het programma voor de ontwikkeling van het vakwerk was dan ook om, door alle mogelijkheden af te gaan, op zoek te gaan naar het beste ontwerp.

De grote tekortschietsing in dit programma was dat de doorbuiging van het wegdek niet in rekening werd gebracht waardoor, door het streven naar het in het programma geïmplementeerde minimum aan materiaal, het vakwerk altijd zo dicht mogelijk tegen het wegdek kwam te liggen. Deze doorbuiging werd niet in rekening gebracht omdat ze alleen via Scia Engineer kon berekend worden wat niet systematisch in het geschreven optimalisatieprogramma kon verwerkt worden.

Omdat dit programma dus niet kon gebruikt worden moest er snel een alternatief worden gezocht. Er was geen tijd meer voor het bedenken van een doordachte ontwerpmethode en daarom werd er teruggevallen op het systematisch afgaan van verschillende vakwerken met behulp van Scia Engineer. Op basis hiervan werd dan gekozen voor het vakwerk met het minste volume dat nog voldeed aan de eisen.

De bouw van het vakwerk is zeer vlot gegaan en dit had als gelukkig resultaat dat de grote rol van de ophangprofielen al vroeg kon opgemerkt worden. Door het inbrengen van deze plaatjes in Scia Engineer kon er zo toch nog op tijd een voldoende sterk nieuw vakwerk ontworpen en gebouwd worden.

Als groep zijn we zeer tevreden over het uiteindelijke resultaat omdat het vakwerk vlot voldeed aan de eisen met een massa van een slechts 416 gram wat toch een zeer goed resultaat is. We hebben geleerd dat het goed is om opties open te houden maar dat het ook niet goed is om ze allemaal open te laten. Als we een paar beslissingen op een vroeger tijdstip genomen hadden, was ons ontwerp waarschijnlijk nog beter geworden. Verder hebben we ook kunnen ondervinden dat het baat om door te werken en op voorhand klaar te zijn. Hierdoor hebben we op tijd kunnen testen en hebben we cruciale fouten op tijd ontdekt. Moesten we het project opnieuw doen dan zou er wel beter worden nagedacht over de gehanteerde ontwerpmethode en hierdoor zou er een meer onderbouwd resultaat uitkomen.

Het project heeft ons zeer veel bijgeleerd inzake bouwkundige aspecten en de verschillende bijkomende randfenomenen en het was zeer aangenaam om eraan mee te werken.

Graag zouden we Bachir Belkassam, Jan Wastiels, Daniël Debondt, Gabriël Van den Nest, Ward Bresseleers, Johan Blom, Ken Sprangers, Frans Boulpaep, Carla Ramault, Thomas Vandenberg en het secretariaat willen bedanken voor dit aangename en leerrijke project.

6. Extra voor Ward

6.1. Tekening van het ingewikkeldste knooppunt

6.2. Ecologische voetafdruk

Milieu-impact

Aangezien de impact op de omgeving en het milieu in het algemeen een steeds belangrijker wordende factor is, wordt in het komende deel dit thema besproken in verband met de ontworpen brug.

Een belangrijke factor is de lijst met gebruikte materialen, welke MDF, houtlijm, aluminium en staal bevat.

Verlijming, boren en zagen (van vezelplaat) zijn de benodigde processen tijdens de constructiefase.

Geen van de vermelde materialen zijn problematisch voor milieu of gezondheid. Hoewel MDF formaldehydeharsen bevat, vormt dit geen gevaar na de productie van het MDF.

Er zijn echter toch twee overwegingen die een bijdrage, zij het een kleine, kunnen leveren in zake de milieuvriendelijkheid van de brug.

- Verlijmingen

Hoewel verlijmingen voor allerlei zaken gebruikt kunnen worden, wordt dit enkel toegepast om verschillende diktes van staven te bekomen.

Dit gehele proces kan vermeden worden door uniformisering, door te vertrekken van een dikkere plaat gedimensioneerd naar de dikste staaf, hetzij als uitgangspunt meerdere platen met verschillende dikte te voorzien.

- Zagen

Zagen van MDF levert, naast een energiefactuur, ook relatief hoge hoeveelheden fijn stof op. Bovendien zorgt het verzagen van de trekstaven (verbreding op de plaats van het scharnier) voor een groter oppervlak. Dit oppervlak moet tijdens de werkingsfase van de brug onderhouden worden, met name geschilderd of gevernist. Voor een versimpelde opstelling (zie bijlage) betekent dit een 5% reductie in te behandelen oppervlak.

Daarnaast is dit ook een besparing in energie, doordat er simpelweg minder bijgesneden dient te worden. Ook betekent dit een reductie in afval van de onbruikbare, afgesneden stukken. MDF wordt de dag van vandaag immers weinig gerecycleerd.

Capaciteitstoename

Wanneer men in de toekomst een toename van de belasting, door de toename in het verkeer, verwacht, zijn er meerdere opties om dit in rekening te brengen. Men kan enerzijds de brug, op het moment dat het scenario zich voordoet, aanpassen, anderzijds is het mogelijk het ontwerp voor, of tijdens, de constructie te wijzigen.

- Uitstellen

Men wacht af totdat de situatie zich voordoet.

Voordelen

- Spreiding van de kosten over de tijd; fondsen gereserveerd voor de uitbreiding kunnen tot aan de uitbreiding van de brug elders geïnvesteerd worden.

Nadelen

- Hogere totale kost; er dient tweemaal gewerkt te worden aan de brug
 - Afsluiten van de brug tijdens vernieuwing
- Incalculeren

Men dimensioneert de brug voor de verwachte situatie in de toekomst

Nadelen

- Hogere onderhoudskosten in de beginjaren; er zijn extra, voor het moment overbodige, staven die mee onderhouden, of vervangen moeten worden tijdens de operatie van de brug.
 - De inschatting van de toename in wegverkeer van de toekomstige situatie kan een onderschatting zijn; er moet alsnog een versterking van de brug komen.
- Voorgesteld compromis

Een tussenweg bestaat erin al een gedeelte van de uitbreiding te voorzien, terwijl de rest geplaatst wordt in de toekomst.

Nu

- Extra verbindingpunten met het wegdek
- Plaats in de bestaande knooppunten waar extra staven moeten toekomen (bv. plaatsvervangende 'schijfjes')

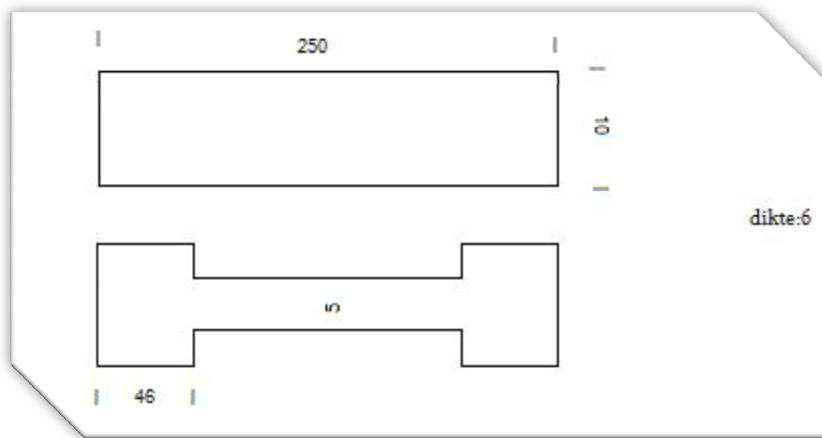
Later

- Extra staven en verbindingen

Deze werkwijze zorgt voor minimale hinder in de toekomst; de aanpassingswerken zijn gering doordat de structurele aanpassingen reeds gebeurd zijn.

De staven tussen de knooppunten eisen het meeste onderhoud tijdens de levensduur, door onder andere de benodigde behandeling van het hout, wat de operatiekost van de brug mee bepaalt. Bovendien treedt er geen slijtage op deze staven.

Bijlage bij Milieu



Bovenste figuur:

$$\begin{aligned}
 A &= 2 * 10 * 250 \\
 &+ 2 * 250 * 6 \\
 &+ 2 * 10 * 6 \\
 &= 8120
 \end{aligned}$$

Onderste figuur:

$$\begin{aligned}
 A &= 4 * 10 * 46 \\
 &+ 2 * 5 * 158 \\
 &+ 2 * 10 * 6 \\
 &+ 4 * 2.5 * 6 \\
 &+ 4 * 6 * 158 \\
 &+ 4 * 46 * 6 \\
 &= 8496
 \end{aligned}$$

verschil: +4.43%